This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Class

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand. Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME III. — ANNÉE 1893.

(TOME XIII DE LA COLLECTION.)

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1893

QA1
.H2
v.13

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

MATHESIS

SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE QUI ONT TROIS POINTS DOUBLES D'INFLEXION(*),

par M. BALITRAND, ancien élève de l'École Polytechnique.

I. Si l'on prend le triangle des points doubles A, B, C, pour triangle de référence, l'équation générale de ces courbes est :

$$\frac{l}{\alpha^2}+\frac{m}{\beta^2}+\frac{n}{\gamma^2}=0. \tag{1}$$

La conique qui a pour équation

$$\frac{l\alpha^2}{\alpha'^2\alpha''^2}+\frac{m\beta^2}{\beta'^2\beta''^2}+\frac{n\gamma^2}{\gamma'^2\gamma''^2}=0, \tag{2}$$

est autopolaire par rapport au triangle de référence et passe par les deux points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, pourvu que ceux-ci soient situés sur la courbe (1).

Si ces deux points se rapprochent indéfiniment, l'équation (2) devient

$$\frac{l\alpha^2}{\alpha'^4}+\frac{m\beta^2}{\beta'^4}+\frac{n\gamma^2}{\gamma'^4}=0, \tag{3}$$

et la conique qu'elle représente est tangente à la courbe (1) au point $(\alpha', \beta', \gamma')$.

On en déduit pour l'équation de la tangente en ce point à la courbe (1)

$$\frac{l\alpha}{\alpha'^3}+\frac{m\beta}{\beta'^3}+\frac{n\gamma}{\gamma'^3}=0. \tag{4}$$

La condition pour que la droite

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$$

soit tangente à la courbe (1) est :

$$\sqrt[3]{l\lambda^2}+\sqrt[3]{m\mu^2}+\sqrt[3]{n\nu^2}=0, \tag{5}$$

(*) Un premier article du même auteur sur ces courbes a paru dans *Mathesis*, (2), I, p. 241. (J. N.)

106255

et les coordonnées du point de contact sont :

$$\alpha' = \sqrt[3]{\frac{l}{\lambda}}, \quad \beta' = \sqrt[3]{\frac{m}{\mu}}, \quad \gamma' = \sqrt[3]{\frac{n}{\nu}}.$$

L'équation (5), équation tangentielle de la courbe (1), peut encore s'écrire

$$(l\lambda^3 + m\mu^3 + n\nu^3)^3 - 27\, lmn\lambda^3\mu^3\nu^3 = 0.$$

Sous cette forme, elle montre immédiatement que les six tangentes aux points doubles touchent la conique

$$l\lambda^3 + m\mu^3 + n\nu^3 = 0.$$

Les coordonnées $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ du centre de la conique (3) sont données par les formules(*)

$$\frac{\frac{l\alpha_1}{\alpha'^4}}{a} = \frac{\frac{m\beta_1}{\beta'^4}}{b} = \frac{\frac{n\gamma_1}{\gamma'^4}}{c},$$

ou bien

$$\frac{1}{\alpha'^2} = \sqrt{\frac{a}{l\alpha_1}}, \quad \frac{1}{\beta'^2} = \sqrt{\frac{b}{m\beta_1}}, \quad \frac{1}{\gamma'^2} = \sqrt{\frac{c}{n\gamma_1}},$$

et, par suite, le lieu du centre est la courbe représentée par l'équation

$$\sqrt{\frac{la}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{mb}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{nc}{\gamma_1}} = 0. \tag{6}$$

C'est une quartique de troisième classe qui a pour points de rebroussement les sommets du triangle de référence.

Théorème. *Le lieu des centres des coniques conjugées au triangle* ABC *et qui touchent la courbe* (1) *est une quartique ayant pour points de rebroussement les sommets du triangle.*

L'enveloppe des coniques conjugées au triangle ABC *et dont les centres sont sur la courbe* (6) *est une quartique qui a pour points doubles d'inflexion les sommets du triangle.*

II. Dans l'équation (1), les coefficients l, m, n ne peuvent être tous positifs, si la courbe qu'elle représente est réelle. Nous supposerons qu'il

---

(*) L'auteur emploie les coordonnées normales. Plus généralement le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport aux coniques conjugées au triangle ABC et qui touchent la courbe (1), est une quartique qui a pour points de rebroussement les sommets du triangle. (J. N.)

en est ainsi et, mettant les signes en évidence, nous écrirons cette équation sous la forme

$$\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}-\frac{n^2}{\gamma^2}=0. \tag{7}$$

Les coordonnées d'un point M_1 de cette courbe s'expriment alors par les formules (nous omettons un facteur de proportionnalité)

$$\alpha=\frac{l}{\cos\varphi},\quad \beta=\frac{m}{\sin\varphi},\quad \gamma=n, \tag{8}$$

ou encore, en changeant de paramètre et posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi=t$,

$$\alpha=\frac{l}{1-t^2},\quad \beta=\frac{m}{2t},\quad \gamma=\frac{n}{1+t^2}. \tag{9}$$

La tangente au point M_1 a pour équation :

$$\frac{\alpha}{l}\cos^2\varphi+\frac{\beta}{m}\sin^2\varphi-\frac{\gamma}{n}=0. \tag{10}$$

Elle passe par le point de rencontre des deux droites

$$\frac{\alpha}{l}\cos\varphi+\frac{\beta}{m}\sin\varphi-\frac{\gamma}{n}=0,\quad \frac{\alpha}{l}\sin\varphi+\frac{\beta}{m}\cos\varphi=0.$$

Il suffit, en effet, pour obtenir l'équation (10), de retrancher les équations précédentes après avoir multiplié la seconde par $\sin\varphi\cos\varphi$.

Pour déduire de cette remarque une construction de la tangente au point M_1 de la courbe (7), considérons la conique

$$\frac{\alpha^2}{l^2}+\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{\gamma^2}{n^2}=0, \tag{11}$$

et menons la tangente au point M dont les coordonnées sont

$$\alpha=l\cos\varphi,\quad \beta=m\sin\varphi,\quad z=n;$$

son équation est

$$\frac{\alpha}{l}\cos\varphi+\frac{\beta}{m}\sin\varphi-\frac{\gamma}{n}=0.$$

Elle coupe les côtés BC, AC aux points P et Q; les droites AP, BQ se coupent au point :

$$\alpha=\frac{l}{\cos\varphi},\quad \beta=\frac{m}{\sin\varphi},\quad \gamma=n;$$

c'est précisément le point M_1.

D'ailleurs l'équation

$$\frac{\alpha}{l}\sin\varphi+\frac{\beta}{m}\cos\varphi=0$$

représente la droite conjuguée harmonique de CM par rapport à CA et CB.

Donc, pour construire la tangente au point M_1 nous menons la tangente au point M et la droite conjuguée harmonique de CM par rapport à CA et CB ; et nous joignons ensuite le point d'intersection de ces deux droites au point M_1.

III. Si l'on adopte les formules (9), l'équation de la tangente devient :

$$\frac{\alpha}{l}(1-t^2)^3+\frac{\beta}{m}(2t)^3-\frac{\gamma}{n}(1+t^2)^3=0. \tag{12}$$

Si l'on y considère (α, β, γ) comme les coordonnées d'un point donné, l'équation (12) fournit les valeurs du paramètre t pour les points de contact des tangentes issues de ce point. Ces valeurs satisfont aux relations

$$\Sigma t=0, \quad \Sigma\frac{1}{t}=0.$$

Par le sommet A, menons une droite; elle coupe la courbe (7) aux points P et Q dont les paramètres vérifient la relation

$$t_1t_2=1.$$

Les tangentes en ces points ont pour équations

$$\frac{\alpha}{l}(1-t_1^2)^3+\frac{\beta}{m}(2t_1)^3-\frac{\gamma}{n}(1+t_1^2)^3=0,$$

$$\frac{\alpha}{l}(t_1^2-1)^3+\frac{\beta}{m}(2t_1)^3-\frac{\gamma}{n}(1+t_1^2)^3=0.$$

Elles se coupent sur le côté BC ; d'ailleurs les droites BP et BQ forment évidemment un faisceau harmonique avec les côtés BA, BC. On a donc ce théorème :

Si, par un point double A *de la courbe* (7), *on mène une droite qui coupe cette courbe aux points* P *et* Q, *les tangentes en ces points se coupent sur le côté* BC ; *les points* A, P, Q *et le point d'intersection de la droite et du côté* BC *forment une division harmonique.*

La tangente à la courbe (7) au point défini par la valeur t_1 du

paramètre t coupe la courbe en deux autres points dont les paramètres sont racines de l'équation

$$2t_1^3t^2 + (t_1^4 - 1)\,t - 2t_1 = 0. \tag{13}$$

Cette équation est remarquable : Elle est indépendante de l, m, n. Si l'on y considère t_1 comme donné, elle détermine les paramètres des points où la courbe (7) est coupée par la tangente au point t_1 ; si l'on y considère t comme donné, elle détermine les paramètres des points de contact des tangentes menées du point t à la courbe.

Elle peut d'ailleurs être identifiée avec l'équation qui donne les points d'intersection d'une droite avec la courbe. Car représentons cette droite

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0. \tag{14}$$

L'équation qui donne les paramètres des points d'intersection de cette droite et de la courbe (7) est :

$$\frac{l\lambda}{1-t^2} + \frac{m\mu}{2t} + \frac{n\nu}{1+t^2} = 0,$$

ou

$$m\beta t^4 + 2t^3(n\nu - l\lambda) - 2t(n\nu + l\lambda) - m\beta = 0.$$

L'identification avec (13) est possible et l'on obtient pour λ, μ, ν les valeurs :

$$\lambda = \frac{1-t^2}{2l}, \quad \mu = \frac{t}{m}, \quad \nu = \frac{1+t^2}{2n}.$$

On retrouve ainsi le beau théorème suivant, dû à Laguerre :

Les points de contact des tangentes menées à la courbe (7) *par un point pris sur cette courbe sont en ligne droite.*

L'équation (13), nous l'avons déjà observé, est indépendante de l, m, n. Si le point P, qui a pour coordonnées l, m, n décrit une droite, à chaque point de cette droite correspond une courbe telle que (7). Les points situés sur ces courbes et qui répondent à une même valeur du paramètre t sont en ligne droite, comme le montrent les formules (9). Les tangentes en ces points coupent les courbes correspondantes en deux autres points dont les lieux sont des droites, car la valeur du paramètre t pour ces points est constante. C'est ce qui résulte de l'équation (13), qui peut d'ailleurs conduire à d'autres conséquences remarquables.

SUR UN NOUVEAU GROUPE DE TROIS PARABOLES;

par M. MANDART, professeur agrégé.

1. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC, H l'orthocentre, O le centre du cercle inscrit, G le centre de gravité, I, I_a, I_b et I_c les centres des cercles tritangents.

Prenons sur OA', OB', OC' trois longueurs égales

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

toutes trois dirigées vers O ou dans le sens opposé.

La droite P_bP_c intercepte sur les côtés OB', OC' du triangle OB'C' des segments égaux; donc elle enveloppe une parabole π_a, tangente aux trois côtés du triangle OB'C' (*Mathesis*, t. X, p. 31). Le foyer F_a est au milieu de l'arc B'OC' du cercle OB'AC' (*); c'est donc la projection de O sur la bissectrice AI. OF_a est l'axe de π_a; la tangente au sommet est parallèle à AI et passe au milieu de B'C'; la directrice, passant par l'orthocentre A' du triangle circonscrit OB'C', coïncide avec la bissectrice de l'angle B'A'C'.

Les droites P_cP_a, P_aP_b enveloppent deux autres paraboles π_b, π_c. D'après ce qui précède, *les foyers* F_a, F_b, F_c, *des courbes* π_a, π_b, π_c *appartiennent au cercle décrit sur* OI *comme diamètre et aux bissectrices* AI, BI, CI; *les directrices sont les bissectrices intérieures du triangle* A'B'C'; *les tangentes aux sommets sont les bissectrices intérieures du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* A'B'C'.

2. Soient α', β, γ les points de contact de B'C', B'O, C'O avec π_a. On a

$$B'\beta = C'O, \quad C'\gamma = B'O, \quad \frac{\alpha'B'}{\alpha'C'} = \frac{\beta B'}{OB'} = \frac{OC'}{OB'}.$$

(*) En effet, le foyer se trouve d'abord sur la circonférence circonscrite au triangle OB'C' de trois tangentes. Les points de contact β, γ de OB', OC' avec π_a s'obtiennent en prenant $B'\beta = C'O$, $C'\gamma = B'O$; comme $O\beta = O\gamma$, le triangle $O\beta\gamma$ est isoscèle, et la médiane issue de O, qui est un diamètre de π_a, est la bissectrice de l'angle $\beta O\gamma$; c'est même l'axe de la parabole. Le foyer se trouve donc à l'intersection de cette bissectrice avec la circonférence OB'C'. La tangente au sommet correspond à $\lambda = \frac{1}{2}(B'O + C'O)$.

On en conclut que les points de contact des côtés du triangle A'B'C' avec les paraboles π_a, π_b, π_c sont en ligne droite.

Plus généralement, les points de contact des côtés de chacun des triangles $P_aP_bP_c$ avec les paraboles correspondantes sont en ligne droite; car dans la définition de ces courbes, le quadrangle $P_aP_bP_cO$ peut être substitué au quadrangle A'B'C'O(*).

3. Le cercle (OI)(**) rencontre OA', OB', OC' en trois points V_a, V_b, V_c situés sur trois parallèles IV_a, IV_b, IV_c aux côtés du triangle ABC; par suite, $A'V_a = B'V_b, = C'V_c = r$, et le triangle $V_aV_bV_c$, qui est inversement semblable à ABC, est une position particulière du triangle $P_aP_bP_c$.

La droite IF_a, bissectrice de l'angle BAC, est aussi la bissectrice de l'angle V_bIV_c; donc F_a est le milieu de l'arc V_bV_c, et V_aF_a est la bissectrice de l'angle V_a du triangle $V_aV_bV_c$. Il résulte de là que le centre du cercle inscrit à $V_aV_bV_c$ est l'orthocentre de $F_aF_bF_c$; ce point est aussi le centre I' du cercle inscrit au triangle A'B'C'.

4. Parmi les triangles $P_aP_bP_c$, il y en a deux qui se réduisent à une droite. Pour les trouver, observons que le double de la surface du triangle $P_aP_bP_c$ a pour expression

$$OP_b \cdot OP_c \sin A + OP_c \cdot OP_a \sin B + OP_a \cdot OP_b \sin C;$$

nous devons donc poser

$$\frac{\sin A}{R\cos A - \lambda} + \frac{\sin B}{R\cos B - \lambda} + \frac{\sin C}{R\cos C - \lambda} = 0, \qquad (1)$$

ou

$$\lambda^3 - R\lambda + R^2 \frac{\Sigma \sin A \cos B \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 0.$$

Le dernier terme de cette équation se ramène à

$$R^2 \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{SR}{2p} = \frac{rR}{2}.$$

(*) Plus simplement, deux quelconques des triangles $P_aP_bP_c$ étant homologiques, les côtés homologues se coupent en trois points qui sont en ligne droite; lorsque les triangles tendent à se confondre, les intersections des côtés homologues ont pour limites les points de contact des côtés avec π_a, π_b, π_c.

(**) Le cercle (OI) est le cercle de Fuhrmann du triangle A'B'C' (Voir *Mathesis* t. X, p. 105).

Substituant et résolvant, on trouve

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(R \pm \sqrt{R(R-2r)}) = \tfrac{1}{2}(R \pm OI). \qquad (2)$$

Si donc le diamètre OI rencontre la circonférence ABC en W, W', les deux valeurs de λ sont égales à $\frac{1}{2}$ IW et $\frac{1}{2}$ IW'; ce qui s'accorde avec un théorème de M. Fuhrmann (*Mathesis*, t. X, p. 111).

5. Prenons A'B'C' pour triangle de référence, et cherchons l'enveloppe de l'axe d'homologie des triangles A'B'C', $P_aP_bP_c$. Soient Q_a, Q_b, Q_c les intersections des côtés homologues. Le triangle OB'C', coupé par la transversale P_bP_c, donne

$$\frac{P_bO}{P_bB'} \cdot \frac{P_cC'}{P_cO} \cdot \frac{Q_aB'}{Q_aC'} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{Q_aB'}{Q_aC'} = \frac{R\cos B - \lambda}{R\cos C - \lambda}.$$

De là, on déduit aisément l'équation de la droite $Q_aQ_bQ_c$ en coordonnées barycentriques :

$$\frac{\alpha}{R\cos A - \lambda} + \frac{\beta}{R\cos B - \lambda} + \frac{\gamma}{R\cos C - \lambda} = 0. \qquad (3)$$

Ordonnons cette équation par rapport à λ et égalons à zéro le discriminant; nous aurons

$$\Sigma^2\alpha\,(\cos B + \cos C) - 4\Sigma\alpha\Sigma\alpha\cos B\cos C = 0,$$

ou

$$\sqrt{(\cos B - \cos C)\alpha} + \sqrt{(\cos C - \cos A)\beta} + \sqrt{(\cos A - \cos B)\gamma} = 0. \quad (4)$$

Telle est l'équation de l'enveloppe de la droite $Q_aQ_bQ_c$; elle représente une parabole inscrite au triangle A'B'C'.

On parvient au même résultat en observant que les points Q_a, Q_b, Q_c décrivent des ponctuelles projectives avec celles des points P_a, P_b, P_c; car la tangente P_bP_c de π_a, par exemple, marque sur les tangentes OB', OC', A'B' des ponctuelles projectives.

Lorsque λ tend vers zéro, les points Q_a, Q_b, Q_c ont pour limites les points de contact de B'C', C'A', A'B' avec π_a, π_b, π_c; donc la droite qui joint ces points de contact touche la courbe (4).

Les deux tangentes communes aux paraboles π_a, π_b, π_c sont également des tangentes à la courbe (4); car elles sont les axes d'homologie de A'B'C' avec deux triangles aplatis (c'est-à-dire dont les sommets sont en ligne droite). Soient $L_aL_bL_\Phi$, $L'_aL'_bL'_c$ ces deux triangles et soient l_a, l_b, l_c les milieux de $L_aL'_a$, $L_bL'_b$, $L_cL'_c$. Les équations des droites

L_aL_b, $L'_aL'_b$ s'obtiennent en remplaçant, dans (3), λ par les deux racines de (1); on voit immédiatement, par la comparaison de (3) et de (1), que les deux droites passent par le point ayant pour coordonnées sin A, sin B, sin C, c'est-à-dire par le centre I' du cercle inscrit au triangle A'B'C'. I' étant l'intersection des directrices π_a, π_b, π_c, les tangentes communes L_aL_b, $L'_aL'_b$ sont rectangulaires.

On a

$$A'L_a = \tfrac{1}{2}(R + \sqrt{R^2 - 2Rr}), \quad A'L'_a = \tfrac{1}{2}(R - \sqrt{R^2 - 2Rr});$$

on en conclut que

$$A'l_a = \tfrac{1}{2}R, \quad L_aL'_a = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Le triangle $I'L_aL'_a$ étant rectangle, on a aussi

$$I'l_a = \tfrac{1}{2}L_aL'_a = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

De là on déduit le théorème suivant :

Si, sur les droites A'O, B'O, C'O, *on prend des longueurs* $A'l_a = B'l_b = C'l_c = \frac{1}{2}R$, *la circonférence circonscrite au triangle* $l_al_bl_c$ *a pour centre le centre* I' *du cercle inscrit à* A'B'C' *et passe par le centre du cercle circonscrit au triangle* A'B'C'.

La parabole (4) a pour directrice OI'; car O est l'orthocentre du triangle circonscrit A'B'C' et I' est l'intersection de deux tangentes rectangulaires. Pour trouver le foyer, menons par A', B', C' des perpendiculaires sur la directrice OI'; on peut les considérer comme aboutissant au foyer situé à l'infini. Par suite, leurs isogonales par rapport au triangle A'B'C' concourent sur la circonférence A'B'C' au foyer proprement dit. Les coordonnées barycentriques de ce point (*) sont

$$\frac{a^2}{\cos B - \cos C}, \quad \frac{b^2}{\cos C - \cos A}, \quad \frac{c^2}{\cos A - \cos B},$$

A'B'C' étant le triangle de référence (*).

(*) Pour les calculer, on cherche, par rapport au triangle ABC, les coordonnées du point à l'infini sur la polaire de I' relative au cercle ABC, cette polaire étant perpendiculaire à OI'; puis celles du point inverse. (J. N.)

UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES ;

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Prenons pour axes de coordonnées les deux tangentes conjuguées rectangulaires et la normale en un point A d'une quadrique ; l'équation de la surface sera

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2gxz + 2fyz - 2z = 0.$$

Soient R_1, R_2 les rayons de courbure principaux, N la corde normale, T_1 et T_2 les portions des tangentes considérées, comprises entre le point A et les pôles de la corde normale, par rapport aux sections normales principales. On a

$$a = \frac{1}{R_1}, \quad b = \frac{1}{R_2}, \quad c = \frac{2}{N}, \quad g = \frac{1}{T_1}, \quad f = \frac{1}{T_2};$$

l'équation peut donc s'écrire :

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \frac{2z^2}{N} + \frac{2xz}{T_1} + \frac{2yz}{T_2} - 2z = 0.$$

2. Si la surface est un hyperboloïde équilatère on a

$$a + b + c = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{N} = 0. \tag{1}$$

Donc : *En tout point d'un hyperboloïde équilatère, la courbure moyenne est égale à l'inverse de la corde normale.*

Ou bien : *Le symétrique de l'extrémité de la corde normale, par rapport au point* A, *est le conjugué de ce point par rapport aux centres de courbure principaux.*

Si une section normale est une hyperbole équilatère, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{2}{N} = 0, \tag{2}$$

R étant le rayon de courbure de la section. La formule d'Euler combinée avec les relations (1) et (2) conduit à l'équation :

$$\frac{\sin^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2\theta = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Donc *l'angle que la trace d'une section normale fait avec le grand axe de l'indicatrice, est le complément de l'angle que l'une des asymptotes de l'indicatrice fait avec le même axe, si la section est une hyperbole équilatère.*

3. Si la surface est un paraboloïde, on a

$$abc - af^2 - bg^2 = 0 ;$$

donc : *En tout point d'un paraboloïde,*

$$\frac{2}{N} = \frac{R_1}{T_1^2} + \frac{R_2}{T_2^2}.$$

4. L'équation de la surface rapportée à son centre et à ses axes est

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d' = 0,$$

où

$$d' = -\frac{ab}{abc - af^2 - bg^2}, \quad a' + b' + c' = a + b + c, \qquad (3)$$

$$P_a = -\frac{d'}{a'}, \quad P_b = -\frac{d'}{b'}, \quad P_c = -\frac{d'}{c'},$$

P_a, P_b, P_c étant les puissances des involutions de points conjugués sur les axes. En vertu de l'égalité (3), on a le théorème :

En tout point d'une quadrique à centre, on a la relation :

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = \left(\frac{2}{N} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{2}{N} - \frac{R_1}{T_1^2} - \frac{R_2}{T_2^2}\right).$$

Soit δ la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent au point A ; on a

$$\delta = \frac{1}{\frac{2}{N} - \frac{R_1}{T_1^2} - \frac{R_2}{T_2^2}} ;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{N} = \delta\left(\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c}\right).$$

Ainsi *le long d'une polhodie la quantité*

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{N}$$

reste constante.

*BIBLIOGRAPHIE.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von M. CANTOR. Zweiter Band, von 1200-1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner, 1892 (X et 363 p. in-8°). Prix du volume complet : 24 marcs.

Voici le sommaire du second fascicule du tome second des importantes leçons de M. Cantor sur l'histoire des mathématiques :

De 1550 *à* 1600. 1. Histoire des mathématiques ; éditions des géomètres classiques ; géométrie ; mécanique (Ramus, Xylander, Stevin, Maurolycus, Benedetti, etc.) ; 2. Suite. Cyclométrie et trigonométrie (Stevin, Viète, A. Romanus, L. van Ceulen, les Metius, etc.); 3. Calcul et algèbre (Schoner, Stevin, Bombelli, Viète, Bürgi, etc.).

De 1600 *à* 1668. 1. Histoire des mathématiques ; éditions des géomètres classiques 2. Géométrie (Kepler, Mydorge, Desargues, Pascal, Descartes, etc.) ; 3. Mécanique pratique et théorique (Galilée, Torricelli, etc.); 4. Trigonométrie et cyclométrie (Neper, Snellius, Girard, Cavalieri, Grégoire de Saint Vincent, etc.); 5. Calcul. Logarithmes (Neper, Bürgi, Briggs, Vlacq, etc.) ; 6. Invention de méthodes. Calcul des probabilités Fractions continues. Collections de problèmes (Pascal, Descartes, Fermat, Schwenter, Mydorge, etc.); 7. Théorie des nombres; algèbre (Bachet, de Billy, Fermat, Descartes, Girard, Harriot, Hudde, etc.); 8. Géométrie analytique (Girard, Sluse, Fermat, Descartes); 9. Considérations infinitésimales. Kepler, Cavalieri (aussi Souvey, Guldin) ; 10. Descartes, Fermat (Quadrature, Tangente, etc.) ; 11. Roberval, Torricelli ; 12. Grégoire de Saint Vincent, Wallis, Pascal, Sluse, Hudde, Van Heuraet, Tacquet, Neil, etc.

Table alphabétique (19 pages). Comme dans le premier volume, il manque une table des chapitres.

Rien que les titres des chapitres et des noms cités témoignent assez de l'intérêt que présente le fascicule du livre de M. Cantor dont nous venons de donner un aperçu.

M. Cantor caractérise la seconde moitié du 16e siècle, en rappelant les découvertes de Stevin en arithmétique pratique et en mécanique, et celles de Viète en algèbre et en géométrie algébrique. Selon lui, la première moitié du 17e siècle, où brille surtout le nom de Fermat, doit être regardée comme l'époque de l'invention du calcul infinitésimal. Nous ne partageons pas cette dernière appréciation. Selon nous, les grands géomètres de la première moitié du 17e siècle sont, au même titre qu'Archimède, des précurseurs de Leibniz et de Newton. Mais ceux-ci sont seuls les vrais inventeurs du calcul infinitésimal, parce que les premiers, ils ont trouvé que le problème des quadratures était l'inverse du problème des tangentes, remarque capitale d'où est sortie l'analyse moderne. L'époque de Fermat est plutôt caractérisée par la découverte de la géométrie analytique et des principes de l'arithmétique supérieure.

Cette petite critique n'enlève rien au mérite du beau livre de M. Cantor que nous recommandons vivement à tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques et à leur histoire. (P. M.)

A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, by John CASEY, edited by Patrick A. E. DOWLING, B. A., R. U. I., Professor of Mathematics, University College, Dublin. Sixth Edition, revised and enlarged. Dublin; Hodges, Figgis and Co; London: Longmans, Green and Co. 1892. Volume in-12 cartonné à l'anglaise de XXIV-302 pages, avec 198 figures dans le texte. Prix : 3 sh. 6 d.

La cinquième édition du traité classique du Dr J. Casey a été publiée en octobre 1888 et aussitôt signalée dans notre journal (VIII, 252) ; mais, si nous avons cru devoir réduire alors à quelques lignes l'annonce d'un ouvrage bien connu de nos lecteurs et dont les précédentes éditions avaient fait l'objet de bibliographies spéciales (voir *Mathesis*, V, pp. 76-78, et VI, p. 276), c'est parce que, nous faisions connaître, à ce moment même, la prochaine publication d'une traduction du magnifique *Supplément* de ce livre, consacré à la Géométrie récente, désormais érigée en corps de doctrine par le Dr Casey.

Mieux que les plus élogieux comptes rendus, la traduction de ce chapitre, et sa publication dans *Mathesis* où, il y a douze ans, cette Géométrie a vu le jour, devaient exercer une influence décisive sur les progrès d'un ensemble de recherches intéressant à un haut degré le public mathématique, à en juger par les importants résultats que les étudiants, les professeurs et plusieurs savants géomètres viennent y ajouter continuellement.

La traduction due à l'obligeante collaboration de M. Falisse, a été publiée en 1889 dans *Mathesis*, et suivie aussitôt d'un supplément inédit, relatif à la théorie des polygones harmoniques, ajouté à cette occasion par M. Casey.

En rééditant à part cette traduction, en 1890, M. J. Neuberg annonçait la préparation de nouvelles études sur les points de Gergonne et de Nagel, et diverses propriétés des figures inversement semblables et de trois figures directement semblables, etc. On pouvait donc en espérer la publication très prochaine, et compter, suivant une progression jusque là régulière, sur une nouvelle édition en 1890.

La mort prématurée du Dr Casey retarda momentanément l'exécution de ce projet; mais, dans l'intervalle, grâce à la collaboration de M. Neuberg, l'étude de la Géométrie récente faisait sa première apparition dans le traité classique de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, dont il a été publié une analyse critique dans la *Revue des Questions Scientifiques*, 1892, puis en supplément dans *Mathesis*, février 1892.

Depuis que l'ouvrage du Dr Casey est parvenu à sa quatrième édition, il a été divisé en deux parties. Celle qui est consacrée à la Géométrie d'Euclide est arrivée, pour ainsi dire, à sa forme définitive. Il n'en est pas de même du supplément qui, à chaque édition, a été entièrement refondu et augmenté de nouvelles applications. Voici, à titre d'indication qui peut avoir son intérêt, un aperçu du développement donné à ce chapitre :

Editions.	Pages.	Figures.	Exercices.
3e 1884	10	2	20
4e 1886	60	23	181
5e 1888	84	31	262
6e 1892	134	45	317

Cette augmentation considérable répond au désir manifesté par M. Casey qui aura trouvé en la personne de son gendre, M. Patrick Dowling, professeur à l'Université de Dublin, et en M. J. Neuberg, les dignes continuateurs de son œuvre.

A la demande de la famille de l'auteur, M. Neuberg a revu tout le chapitre supplémentaire traitant de la Géométrie récente. Voici les principales modifications qu'il y a introduites. Dans la section I, il a fait connaître la notion des points complémentaires et celle de pôle et polaire trilinéaires. La section II s'est accrue de la théorie des figures inversement semblables. Une nouvelle section, la section VIII, comprend des *Recherches diverses* : Triangles podaires et antipodaires, triangles orthologiques, métapôles de deux triangles, points jumeaux, points tripolairement associés, cercles adjoints, inversion symétrique, cercles tritangents.

Cet exposé comprend à lui seul 35 pages, de sorte qu'en définitive le *Supplément* atteint presque le développement de l'ouvrage primitif dans les trois premières éditions.

Cette augmentation ne s'arrêtera certainement pas là, et, par les résultats obtenus, nous pouvons juger de ceux à venir et augurer que l'œuvre de M. Casey survivra longtemps à son auteur. (B. M.)

Annuaire pour l'an 1893 *publié par le bureau des Longitudes, avec des notices scientifiques.* Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893. In-18 de v-868 pages, avec figures et 2 Cartes magnétiques. Prix : 1 fr. 50.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1893 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *Sur l'Observatoire du mont Blanc;* par J. Janssen. — *Sur la corrélation des phénomènes d'électricité statique et dynamique et la définition des unités électriques;* par A. Cornu. — *Discours sur l'Aéronautique, prononcé au Congrès des Sociétés savantes;* par J. Janssen. — *Discours prononcé aux funérailles de M. Ossian Bonnet;* par F. Tisserand. — *Discours prononcés aux funérailles de M. l'Amiral Mouchez;* par Faye, Bouquet de la Grye et Lœwy. — *Discours prononcé* par J. Janssen, *au nom du Bureau des Longitudes, à l'inauguration de la statue du Général Perrier, à Vallerangue (Gard).*

Nous signalons spécialement la notice très étendue (75 pages) de M. Cornu sur l'électricité, à la fin du volume, puis quelques pages du même savant sur l'équivalent mécanique de la chaleur et sur le point critique des fluides.

SOMMATION DES SINUS ET DES COSINUS D'ANGLES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE(*);

par M. L. Meurice.

Soient OX, OY deux droites rectangulaires. Traçons une droite OA_1, faisant avec OX un angle a. En un point A_1 de OA_1, traçons A_1A_2 faisant avec le prolongement de OA_1 un angle h et prenons $A_1A_2 = OA_1$. De même en A_2 traçons A_2A_3 faisant avec A_1A_2 prolongé un angle égal à h et prenons $A_2A_3 = A_1A_2$, etc.

Nous obtiendrons ainsi la ligne polygonale régulière $OA_1A_2A_3 \ldots A_n$, qui sera inscriptible dans une circonférence. Par suite, les angles inscrits A_1OA_2, A_2OA_3, ... seront tous égaux entre eux et auront pour valeur $\frac{1}{2}h$.

Les angles OA_2A_1, OA_3A_2, ..., OA_nA_{n-1} auront pour valeurs $\frac{1}{2}h$, h, $\frac{3}{2}h$, ..., $\frac{1}{2}(n-1)h$.

Le triangle OA_nA_{n+1} nous donne

$$\frac{OA_n}{A_nA_{n+1}} = \frac{\sin \frac{1}{2} nh}{\sin \frac{1}{2} h},$$

d'où, en appelant l le côté de la ligne régulière,

$$OA_n = l \frac{\sin \frac{1}{2} nh}{\sin \frac{1}{2} h}.$$

L'angle A_nOX est évidemment égal à $a + \frac{1}{2}(n-1)h$. Donc les projections de OA_n sur OX et OY sont égales à

$$OA_n \cos A_nOX = l \frac{\sin \frac{1}{2} nh \cos [a + \frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin \frac{1}{2} h},$$

$$OA_n \sin A_nOX = l \frac{\sin \frac{1}{2} nh \sin [a + \frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin \frac{1}{2} h}.$$

Remarquons maintenant que les côtés OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$

(*) Si la méthode employée ici n'est pas nouvelle, elle est, du moins, peu connue. (*Rédaction.*)

font avec OX les angles a, $a+h$, $a+2h$, .. , $a+(n-1)h$. Donc leurs projections sur OX et sur OY sont respectivement

$$l\cos a,\ l\cos(a+h),\ \ldots,\ l\cos[a+(n-1)h],$$
$$l\sin a,\ l\sin(a+h),\ \ldots,\ l\sin[a+(n-1)h].$$

D'où, en appliquant le théorème des projections :

$$\cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{1}{2}nh\cos[a+\frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h},$$

$$\sin a+\sin(a+h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{1}{2}nh\sin[a+\frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 743.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 263 et II, p. 253).

1° *Etant donnés une conique et deux points* A *et* B *dans son plan, les points de contact des tangentes à cette conique, menées par les deux points* A, B, *sont sur une deuxième conique* S *passant par les deux points* A, B. *A quelle condition la conique* S *est-elle une hyperbole équilatère ?*

2° *Démontrer qu'après avoir choisi le point* A, *on peut trouver comme il suit, un point* B *remplissant la condition indiquée ci-dessus : Du point* A, *on trace deux droites quelconques et par le pôle de chacune d'elles, on mène une perpendiculaire à l'autre. Ces deux droites se coupent au point* B *cherché.*

3° *Le point* A *étant fixe et les deux droites dont il vient d'être question tournant autour du point* A, *quel est le lieu du point* B *?* (V. Jamet.)

Solution géométrique par M. Cl. Servais. Soient P et Q les pôles de deux droites p et q se coupant au point A, B le point d'intersection des perpendiculaires abaissées des points P et Q respectivement sur les droites q et p. La droite p étant fixe et l'autre q mobile autour du point A, les droites PB et q décrivent deux faisceaux projectifs. Mais le faisceau (q) est projectif à la ponctuelle (Q) ou au faisceau (QB) dont le centre est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite p ; les faisceaux (PB) et (QB) sont donc projectifs. Si la droite q coïncide avec la droite p, les rayons PB et QB sont superposés, par conséquent les

faisceaux (PB) et (QB) sont perspectifs et le point B décrit une droite a perpendiculaire au diamètre passant par le point A(*). Cette droite est indépendante du choix de la droite p; car les droites a relatives à chacune des droites p et q, supposées séparément fixes, ont un point commun et même direction.

Soient C et D les points de contact des tangentes issues du point A; A_1 et A_2, A_3 et A_4 les points d'intersection des droites CD et a avec les axes de la conique; A_5 et A_6 les conjugués respectifs de A_1 et A_2 sur ces axes. Le quatrième sommet B_1 du rectangle ayant pour côtés OA_1 et OA_2 est commun aux perpendiculaires abaissées des points A_4 et A_3 respectivement sur AA_6 et AA_4. Ce point B_1 appartient donc à la droite a. On a

$$OA_3 . OA_3 = OA_3 . OA_1 + OA_3 . A_1A_3 .$$

Or

$$\frac{OA_5}{B_1A_1} = \frac{AA_5}{A_1A_3} \quad \text{ou} \quad \frac{OA_5}{OA_2} = \frac{OA_6}{A_1A_3};$$

par conséquent,

$$OA_5 . OA_5 = OA_5 . OA_1 + OA_2 . OA_6 = P_a + P_b,$$

P_a et P_b étant les puissances de l'involution des points conjugués sur les axes. De même

$$OA_4 . OA_6 = P_a + P_b;$$

donc *la droite a est la polaire du point* A *par rapport au cercle de Monge de la conique considérée.*

Si on prend pour les droites p et q les tangentes AC et AD, on voit que la droite a passe par l'orthocentre H du triangle ACD. La droite a peut donc être construite si on connaît seulement le triangle ACD. Donc : *Les cercles de Monge de toutes les coniques qui ont un double contact avec une conique* E *aux points* C *et* D *forment un faisceau*(**).

(*) On suppose le point Q à l'infini ; q devient le diamètre OA et le point B est à l'infini.

(**) Cette remarque est un cas particulier du théorème suivant, qui est connu :

Les cercles de Monge relatifs à toutes les coniques qui touchent quatre droites fixes passent par deux points fixes.

Pour démontrer cette propriété, soient U, V les points d'intersection des cercles ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet formé par les tangentes fixes. Les couples de droites joignant U aux sommets opposés du quadrilatère

Si le point A est sur le cercle de Monge, la droite a passe par ce point et réciproquement. Cela exige que le triangle ACD soit rectangle en A, sinon a serait une hauteur de ce triangle et elle ne pourrait être perpendiculaire à la médiane OA. D'ailleurs, si le triangle CAD est rectangle en A, ce point est situé sur a ; par conséquent : *Le cercle de Monge d'une conique est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

Soient B un point quelconque de la droite a, F le point de contact d'une tangente menée de B à la conique, G le point (AH, FD), I le point (AC, FB), J le point (CD, AB). La polaire j du point J est la hauteur AH du triangle ACD ; car les perpendiculaires abaissées de C et J respectivement sur les droites j et AC se coupent sur a ; donc la perpendiculaire abaissée de C sur j passe par le point J. Soient K le point (AH, CD), L le conjugué de G sur la droite FD ; on a

$$(CDJK) = (FDLG) = -1,$$

donc les droites CF, JL, GK sont concourantes et leurs pôles I, G, J sont en ligne droite.

De là résulte que les six points ACDFBH sont sur une conique ; H étant l'orthocentre du triangle ACD, cette conique est une hyperbole équilatère. Donc, si les points A et B sont conjugués par rapport au cercle de Monge, les six points ABCDEF sont sur une hyperbole équilatère (E est le point de contact de la seconde tangente issue de B).

Généralisation. *Les plans polaires de deux points* A *et* B *par rapport à une quadrique* (S), *coupent cette surface suivant deux coniques* σ_a *et* σ_b, *situées sur une même quadrique* (S_1) *avec les points* A *et* B. *Cette quadrique* (S_1) *sera un hyperboloïde équilatère si les points* A *et* B *sont conjugués par rapport à la quadrique, lieu des points d'où l'on peut mener à la surface* (S) *trois tangentes rectangulaires.*

Note. Si l'on considère la parabole tangente aux droites AC et AD aux points C et D, le point A et la droite a seront également distants de la directrice. De là, la construction de la directrice d'une parabole, déterminée par deux tangentes AC, AD et leurs points de contact C et D : du milieu de la droite AH, H étant l'orthocentre du triangle ACD, on abaisse une perpendiculaire sur la médiane de ce triangle, issue du point A.

---

forment une involution rectangulaire ; donc les tangentes menées de U à chacune des coniques sont également rectangulaires, et U appartient au cercle de Monge de chacune de ces courbes. (J. N.)

Question 771.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 152.)

Soit I *le centre du cercle inscrit à* ABC. *Démontrer que les projections du point de Nagel sur les diamètres du cercle, parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère* IABC, *appartiennent à un diamètre de cette hyperbole.* (E. Cesàro.)

Solution par M. Sollertinsky. On sait que l'hyperbole équilatère IABC passe par les points de Nagel et de Gergonne correspondant au cercle I. Mais, si l'on construit, sur une corde quelconque d'une hyperbole comme diagonale, un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, l'autre diagonale du parallélogramme passe par le centre de la courbe.

Solution par M. Droz. Dans le tome IX, p. 207, de *Mathesis*, M. de Longchamps a proposé une question intéressante dont je ne cite qu'une partie :

On décrit le cercle Δ_a *qui touche les côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC *et qui a un contact intérieur en* V_a *avec le cercle circonscrit. La polaire de* A *par rapport à* Δ_a *passe par le centre* I *du cercle inscrit; les droites* AV_a, BV_b, CV_c *concourent au point inverse du point de Nagel de* ABC (Voir la démonstration, t. X, p. 67).

Je complète cette question en fixant la position du point inverse de Nagel. Si O est le centre du cercle circonscrit, d la distance $A\Delta_a$, ρ le rayon du cercle Δ_a, on a

$$\rho = d \sin \tfrac{1}{2} A, \quad IA = d \cos^2 \tfrac{1}{2} A, \quad d = \frac{4R \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}{\cos^2 \frac{1}{2} A}.$$

Soit L le point de rencontre des droites OI, AV_a. En considérant le triangle $OI\Delta_a$ coupé par la transversale AV_a, on trouve

$$\frac{OL}{IL} = \frac{OV_a \cdot \Delta_a A}{\Delta_a V_a \cdot IA} = \frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}.$$

Le point L est donc le même pour AV_a, BV_b, CV_c. Il en résulte que *l'inverse du point de Nagel appartient à la droite* OI.

La transformée par points inverses de la droite OI est l'hyperbole équilatère ABCI, car O et I ont pour inverses H et I ; cette hyperbole passe donc par le point de Nagel ν, qui est l'inverse d'un point de la droite OI.

Cela posé, si, sur une corde de l'hyperbole comme diagonale, on

construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale passe par le centre de la courbe. (*)

Appliquant cette propriété à la corde νI de l'hyperbole ABCL, on trouve le théorème de M. Cesàro.

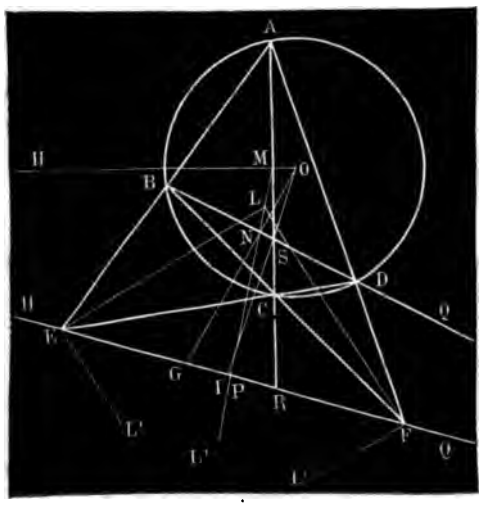
Note. M. Déprez a donné une solution peu différente de celles qui précèdent, et fait quelques remarques intéressantes : 1° L'hyperbole ABCI passe aussi par le point de Gergonne Γ de ABC, et par le point P dont les coordonnées sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles inscrits à ABC. 2° Dans le théorème de M. Cesàro, on peut remplacer ν par T ou par P. 3° Les circonférences circonscrites aux triangles podaires des points ν, T, P par rapport à ABC se coupent sur le cercle des neuf points de ABC, au centre de l'hyperbole ABCI.

×Question 774.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 152.)

Soient M, N *les milieux des diagonales* AC, BD *d'un quadrilatère inscriptible* ABCD, *et soient* E, F *les points d'intersection des côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* DA. *Démontrer que les circonférences* MNE, MNF *ont pour tangente commune la troisième diagonale* EF.

(Langley.)



Solution par M. Droz-Farny. O étant le centre de la circonférence circonscrite, représentons par G, H les points de rencontre de ON, OM avec EF, par P le milieu de EF, par S l'intersection des diagonales AC, BD. AC et BD divisant EF en

(*) Ce théorème est dû à Bobillier (*Annales de Gergonne*, t. XIX, page 358); M. Schoute en a déduit des propriétés fort curieuses d'une certaine courbe unicursale du 4e ordre (*Bulletin de Darboux*, t. XIX, p. 278). (Droz)

parties harmoniques, le faisceau S (ABEF) est harmonique ; par suite, les pôles des droites SA, SB, SE, SF forment une division harmonique. Ces pôles, situés sur la polaire EF de S, sont évidemment H, G, F, E ; P étant le milieu de EF, on a

$$\overline{PE}^2 = \overline{PF}^2 = PG \cdot PH.$$

D'autre part, si r désigne le rayon de la circonférence O,

$$OM \cdot OH = ON \cdot OG = r^2 ;$$

le quadrilatère MNGH est donc inscriptible, et l'on a

$$PM \cdot PN = PG \cdot PH = \overline{PE}^2 = \overline{PF}^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Solution par M. Sollertinsky. Les triangles EBD, ECA étant inversement semblables, les médianes EN, EM sont proportionelles à BD, AC et également inclinées sur la bissectrice de l'angle AED ; de même FN, FM sont dans le rapport BD : AC et également inclinées sur la bissectrice de l'angle AFC. Ces deux bissectrices rencontrent donc MN en un même point L tel, que LN : LM = BD : AC. Semblablement les bissectrices extérieures des angles NEM, NFM se coupent en un même point L′ de MN. L'angle ELF étant droit, la figure ELFL′ est un rectangle ; donc LL′, EF se coupent en leur milieu commun P, et PE = PL. La division harmonique MNLL′ donne

$$\overline{PE}^2 = \overline{PF}^2 = \overline{PL}^2 = PM \cdot PN.$$

Donc EF est la tangente commune aux cercles EMN, FMN.

Solution par M. Emmerich. On a successivement

$$SA \cdot SC = SB \cdot SD,$$

$$(SM + MA)(MA - SM) = (SN + NB)(NB - SN),$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MS}^2 = \overline{NB}^2 - \overline{NS}^2. \qquad (1)$$

Les points (A, C, S, R), (B, D, S, Q) forment des groupes harmoniques, R et Q étant les points de rencontre de EF avec AC et BD ; donc

$$\overline{MA}^2 = MS \cdot MR, \quad \overline{NB}^2 = NS \cdot NQ. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2), on conclut

$$MS(MR - MS) = NS(NQ - NS), \quad \text{ou } MS \cdot SR = NS \cdot SQ.$$

Les points M, N, R, Q appartiennent donc à une même circonférence ; on en déduit, P étant le milieu de EF,

$$PR.PQ = PM.PN.$$

Mais la division harmonique (EFPQ) donne

$$\overline{PF}^2 = PR.PQ;$$

par suite, $\overline{PF}^2 = \overline{PE}^2 = PM.PN$; ce qui démontre le théorème.

Solution par M. Déprez. I. S étant le pôle de EF, OS est perpendiculaire à EF et rencontre EF en un point I dont la puissance par rapport au cercle O est IS.IO. On déduit de là que EF est l'axe radical du cercle O et du cercle décrit sur OS comme diamètre.

Le triangle SEF est conjugué par rapport au cercle O ; celui-ci est donc l'anticomplémentaire du cercle conjugué avec le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle SEF. Par suite, la puissance du milieu P de EF par rapport au cercle O est égale à

$$\tfrac{1}{4}\overline{EF}^2 = \overline{PE}^2 = \overline{PF}^2;$$

telle est aussi la puissance de P par rapport au cercle décrit sur OS comme diamètre et passant par M et N. On en conclut

$$\overline{PF}^2 = PM.PN,$$

ce qui démontre le théorème.

Question 777.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 176.)

Soient M, N *deux points correspondants d'une ellipse et du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Le rayon* OM *de l'ellipse rencontrant en* P *la tangente menée en* N *au cercle, on demande l'aire de la courbe engendrée par* P. (Mandart.)

Solution par M^me^ Prime *et* M. Listray. Les coordonnées des points M, N peuvent être représentées par $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $(a\cos\theta, a\sin\theta)$; le rayon OM et la tangente en N ont respectivement pour équations

$$y = x\cdot\frac{b}{a}\operatorname{tang}\theta, \quad x\cos\theta + y\sin\theta = a.$$

Le point d'intersection P de ces droites a pour coordonnées

$$x = \frac{a^2 \cos\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}, \quad y = \frac{ab\sin\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}, \tag{1}$$

et le lieu de P a pour équation

$$a^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (ay^2 + bx^2)^2.$$

Soit Q le point où l'ordonnée de P rencontre ON. Les ordonnées des points P, Q étant dans le rapport constant $b : a$, les aires S, S′ des courbes décrites par ces points sont dans le même rapport. Or l'angle $QOx = \theta$ et $OQ = x : \cos\theta$, x ayant la valeur (1); donc

$$OQ = \frac{a^2}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}.$$

Il en résulte

$$S' = 2a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^2}.$$

Soit I l'intégrale indéfinie. Si l'on écrit

$$I = \int \frac{1}{a^2\left(1 + \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2\theta\right)^2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^4\theta},$$

on est conduit à poser

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et comme

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\theta},$$

on aura

$$I = \frac{1}{ab\sqrt{ab}} \int (a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{ab}} \int [a(1 - \cos 2\varphi) + b(1 + \cos 2\varphi)]\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{ab}} \left[(a + b)\varphi - \frac{1}{2}(a - b)\sin 2\varphi\right].$$

Observant maintenant qu'à $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ correspondent les valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on trouve

$$S' = \frac{a^4}{ab\sqrt{ab}}\left[(a+b)\varphi - \frac{1}{2}(a-b)\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \pi\frac{a^3(a+b)}{2b\sqrt{ab}},$$

$$S = \frac{b}{a}S' = \pi\frac{a^2(a+b)}{2\sqrt{ab}}.$$

M. Fraipont a résolu la même question en introduisant les coordonnées polaires du point P.

×Question 787.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 216.)

Les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *sont divisés aux points* P, Q, R, *dans un même rapport* $p : q$, *et aux points* P', Q', R' *dans le rapport inverse. Démontrer que les cercles* PQR, P'Q'R' *ont pour axe radical la droite* GK *joignant le centre de gravité de* ABC *au point de Lemoine.* (Tucker(*).)

Lorsque le rapport $p : q$ *varie, l'axe radical des cercles* ABC, PQR *enveloppe une conique.* (J. Neuberg).

Solution par Mme Prime *et* MM. Mandart, Droz, Déprez. Les coordonnées barycentriques des points P, Q, R sont

$$0,\ p,\ q;\quad p,\ 0,\ q;\quad q,\ p,\ 0.$$

En exprimant qu'elles vérifient l'équation de la circonférence PQR, à savoir

$$(\alpha+\beta+\gamma)(u\alpha+v\beta+w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta = 0,$$

on trouve les égalités de condition

$$vq + wp = \frac{a^2pq}{p+q},\quad up + wq = \frac{b^2pq}{p+q},\quad uq + wp = \frac{c^2pq}{p+q}.$$

(*) La première partie de la question 787 est la question 11599 de l'*Educational Times* (juillet 1892). M. Tucker en a donné une solution, avec quelques autres développements et la 2e partie du n° 787, dans le même journal (décembre 1892.)

Celles-ci donnent, en supposant $p + q = 1$,

$$u = pq\,(b^2p^2 + c^2q^2 - a^2pq),$$
$$v = pq\,(c^2p^2 + a^2q^2 - b^2pq),$$
$$w = pq\,(a^2p^2 + b^2q^2 - c^2pq).$$

Soient u', v', w' les quantités analogues relatives au cercle P'Q'R'; elles en diffèrent par le changement de p en q et de q en p. L'axe radical des cercles PQR, P'Q'R' aura pour équation

$$(u - u')\,\alpha + (v - v')\,\beta + (w - w')\,\gamma = 0,$$

ou

$$(b^2 - c^2)\,\alpha + (c^2 - a^2)\,\beta + (a^2 - b^2)\,\gamma = 0.$$

On voit immédiatement qu'il passe par le point G (1, 1, 1) et le point K (a^2, b^2, c^2).

L'axe radical des cercles ABC, PQR est représenté par l'équation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0;$$

en substituant les valeurs de u, v, w, on trouve

$$(b^2\alpha + c^2\beta + a^2\gamma)p^2 - (a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma)pq + (c^2\alpha + a^2\beta + b^2\gamma)q^2 = 0.$$

L'enveloppe de cet axe a pour équation

$$(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma)^2 - 4\,(b^2\alpha + c^2\beta + a^2\gamma)\,(c^2\alpha + a^2\beta + b^2\gamma) = 0.$$

Remarques. — 1. Cette enveloppe est une conique qui touche les brocardiennes de la droite de Lemoine aux points où elles rencontrent la réciproque de cette droite. (J. N.)

2. On peut voir géométriquement que l'axe radical des cercles ABC, PQR enveloppe une conique. En effet, les axes radicaux des trois cercles ABC, PQR, P'Q'R' concourent en un même point; donc de chaque point de la droite GK, on peut mener deux droites de l'enveloppe. (Droz.)

3. Les droites QR et Q'R' se coupent en un point A' de la médiane AG; les droites RP et R'P', en un point B' de BG; les droites PQ et P'Q', en un point C' de CG. Le triangle A'B'C' est homothétique à ABC; le rapport de similitude est égal à $(m^2 - mn + n^2) : (m + n)^2$. Les six points P, Q, R, P', Q', R' sont sur une conique homothétique à l'ellipse de Steiner et ayant pour équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0. \quad \text{(Tucker.)}$$

4. Prenons sur BC, CA, AB les longueurs $BP = CQ = AR = \lambda$; et aussi $CP' = AQ' = BR' = \lambda$. L'axe radical des cercles PQR, P'Q'R' passe par le centre de gravité du périmètre du triangle ABC.

Si les distances BP, CQ, AR sont inversement proportionnelles aux côtés BC, CA, AB et que P', Q', R' soient les isotomiques de P, Q, R, l'axe radical des cercles PQR, P'Q'R' passe constamment par le centre de gravité de AB.C (DÉPREZ.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

541. L'expression $9^n - 8n - 1$ est divisible par 64. (*J. de Vuibert.*)

542. Les nombres 20 et 21 sont les seuls nombres de deux chiffres dont le plus petit diviseur autre que l'unité est égal à la somme des chiffres de ces nombres. (*J. de Vuibert.*)

543. Trouver l'âge actuel d'une personne sachant qu'il est égal à la somme des chiffres de l'année de sa naissance. (*J. de Vuibert.*)

544. Si

$$aA = bB = cC, \text{ on a } (a + B)(b + C)(c + A) = (A + b)(B + c)(C + a)$$

(*J. de Vuibert.*)

545. Si un nombre de trois chiffres est divisible par 21, il en de même de la somme du chiffre des centaines et de quatre fois le chiffre des unités, diminuée de deux fois le chiffre des dizaines. (*J. de Vuibert.*)

546. Trouver quatre nombres entiers, positifs, tels que leur somme soit égale à la somme obtenue en ajoutant au produit du plus grand par le plus petit, le produit des deux autres.

Soient x, $x + y$, $x + z$, $x + u$, les quatre nombres cherchés rangés par ordre de grandeur. On trouve pour équation du problème

$$2x(x - 2) + (y + z + u)(x - 1) + yz = 0;$$

d'où il résulte que x est inférieur à 2. Donc $x = 1$, $yz = 2$, ou $y = 1$, $z = 2$, ou $y = 1$, $z = 2$, u indéterminé. Les nombres cherchés sont 1, 2, 3 et un quatrième nombre quelconque. (J. M. E.)

547. Si deux angles opposés A, C d'un quadrilatère ABCD sont complémentaires, le carré du produit des diagonales est égal à la somme des carrés des produits des côtés opposés.

Ce théorème, peu connu, est compris dans ce théorème plus général :

Si la circonférence ABC rencontre DA, DB, DC en A', B', C', les produits

DA.BC, DB.CA, DC.AB sont proportionnels à B'C', C'A', A'B', et les angles du triangle A'B'C' s'expriment très simplement en fonction des angles que font, deux à deux, les droites AB, BC, CA, DC, DA, DB.

548. Si A et B sont deux points d'une circonférence de centre O, on fait passer une circonférence C par les points O, A, B.

Soit α l'angle AOB. Démontrer que le rapport des arcs interceptés sur les circonférences C et O par l'angle AOB $= \cos\frac{1}{2}\alpha$. (L. Meurice.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

***801.** Sur une droite AB donnée de grandeur et de position dans le plan horizontal, considérons le point A comme un élément de la surface de ce plan horizontal. Soit alors une droite BC située dans le plan vertical qui passe par AB. Si l'on fait glisser sur BC une lumière d'intensité constante, il y a une position M pour laquelle la quantité de lumière reçue en A est maximum. Trouver le lieu des points M satisfaisant à cette condition, quand la droite BC prend toutes les positions possibles autour du point B et dans le plan vertical. (A. Morel.)

802. Les normales en deux points P, P' d'une conique coupent en C, C' l'axe focal. Soit F un foyer ; les rayons vecteurs PF, P'F sont rencontrés, respectivement, en D, D' par les parallèles à la corde PP' menées par C', C. Démontrer géométriquement que FD = FD' et que la droite DD' passe par le point d'intersection des normales PC, P'C'. Déduire de ce qui précède une construction du centre de courbure relatif au point P.

(Droz.)

***803.** Soient α, β, γ les arcs de grand cercle joignant les sommets du triangle sphérique ABC au centre isogone Z (point d'où l'on voit les côtés BC, CA, AB sous le même angle). Démontrer la relation

$$8\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin a\sin h_a,$$

h_a désignant la hauteur abaissée de A sur BC. (Déprez.)

***804.** Quelle que soit la base du système de numération, aucun des nombres représentés par

$$10101,\quad 101010101,\quad 1010101010101,\quad \cdots$$

n'est premier. (E. Catalan.)

805. Trouver, dans le plan d'un rectangle ABCD, un point M tel, que les triangles ABM, BCM, CDM, DAM aient des cercles circonscrits égaux. Trouver le lieu géométrique du point M et des orthocentres des quatre triangles. (H. MANDART.)

806. Si quatre droites a, b, c, d sont coupées par une cinquième e aux points A, B, C, D, démontrer que les coniques circonscrites aux triangles bcd, cda, dab, abc et touchant respectivement a, b, c, d en A, B, C, D rencontrent e en un même point. (J. NEUBERG.)

***807.** On a, identiquement,

$$\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\cdots+\frac{1+x^n}{1-x^n}x^{(n^2)}=$$

$$\frac{x}{1-x}(1+x^n)+\frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{4n})+\cdots+\frac{x^n}{1-x^n}[1+x^{(n^2)}.]$$

Si l'on suppose x compris entre 0 et 1, et que l'on fasse croître n indéfiniment, cette identité devient celle de Clausen. (BASCHWITZ.)

808. M étant un point quelconque du plan d'un triangle ABC, soient H_a, H_b, H_c les orthocentres des triangles MBC, MCA, MAB. Si les droites AH_a, BH_b, CH_c sont concourantes, M est sur la circonférence circonscrite au triangle ABC. Quel est le lieu du point de concours des droites AH_a, BH_c, CH_a? (LEMOINE.)

809. On joint les extrémités C et D d'un diamètre d'une conique à un foyer F de cette courbe, par des droites rencontrant le diamètre conjugué C'D' aux points M et M'. Si O est le centre de la conique,

$$OM\cdot OM'+OC^2=\textit{constante}.$$

Si α est l'angle que la tangente au point C fait avec un rayon vecteur CF, on a

$$OC'\sin\alpha=\textit{constante}.$$ (CL. SERVAIS.)

Rectification. M. Catalan nous avait signalé, avant M. Lemoine, que la construction de la moyenne proportionnelle attribuée à M. Bordage avait été donnée par M. Gouzy (Voir *Mathesis*, (2), II, 275).

SUR LE CERCLE ORTHOCENTROÏDAL;

par Madame PRIME.

Soient G, H, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC. Le cercle décrit sur GH comme diamètre (*cercle orthocentroïdal*) jouit de propriétés assez curieuses, dont un grand nombre ont été signalées dans *Mathesis*, t. X, p. 166.

Dans l'article suivant, je vais faire connaître quelques nouvelles propositions sur ce cercle.

1. Soient F_1, F_2, F_3 trois figures semblables construites sur les hauteurs AH_a, BH_b, CH_c comme lignes homologues; désignons par a_2, b_2, c_2 les points de rencontre du cercle (GH) avec les médianes AA', BB', CC', et par a_1, b_1, c_1 ses points d'intersection avec les hauteurs. Le système des figures semblables F_1, F_2, F_3 a pour cercle de similitude le cercle (GH), pour triangle de similitude $a_2b_2c_2$, pour triangle invariable $a_1b_1c_1$ (CASEY, *Géométrie récente*). On en conclut que les médianes du triangle formé par trois droites homologues de F_1, F_2, F_3, passent par a_2, b_2, c_2 et se coupent sur la circonférence (GH).

2. Cherchons la surface S' du triangle $a_1b_1c_1$. Ce triangle est inversement semblable à ABC; car les droites Ga_1, Gb_1, Gc_1 sont parallèles à BC, CA, AB. Le rayon du cercle circonscrit étant égal à $\frac{1}{2}$ GH = OG, on a

$$\frac{S'}{S} = \frac{\overline{OG}^2}{R^2} = \frac{R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)}{R^2} = 1 - \frac{4S \operatorname{cotg}\omega}{9R^2}$$

$$= 1 - \tfrac{8}{9} \sin A \sin B \sin C \operatorname{cotg}\omega;$$

ω désigne ici l'angle de Brocard et l'on sait que

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}, \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

3. Cherchons les coordonnées des points a_1, b_1, c_1.

De ce que a_1 divise H_aA dans le rapport 1 : 2, on déduit facilement que les coordonnées normales de ce point sont proportionnelles à

$$\frac{1}{2\cos B \cos C}, \quad \frac{1}{\cos B}, \quad \frac{1}{\cos C}$$

et les coordonnées barycentriques à

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C),\quad \operatorname{tg} B,\quad \operatorname{tg} C.$$

4. Pour trouver les coordonnées de a_2, nous cherchons d'abord le rapport $Aa_2 : a_2A'$. Le quadrilatère H_aHa_2A' étant inscriptible, on a

$$Aa_2 \cdot AA' = AH \cdot AH_a = 2OA' \cdot AH_a = a \operatorname{cotg} A \cdot h_a = bc \cos A;$$

donc

$$a_2A = \frac{bc \cos A}{m_a},\quad a_2A' = m_a - \frac{bc \cos A}{m_a} = \frac{m_a^2 - bc \cos A}{m_a}.$$

En ayant égard aux relations

$$m_a^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2) - \tfrac{1}{4}a^2,\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

on trouve

$$a_2A' = \frac{a^2}{4m_a}\text{(*)};$$

par suite,

$$Aa_2 : a_2A' = 4bc \cos A : a^2.$$

Il en résulte que les coordonnées barycentriques de a_2 sont proportionnelles à

$$a^2,\quad 2bc \cos A,\quad 2bc \cos A,$$

et les coordonnées normales à

$$a,\quad 2c \cos A,\quad 2b \cos A.$$

5. *Les côtés opposés de l'hexagone $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, qui est un hexagone harmonique ayant pour point de Lemoine le point de Lemoine* K *du triangle* ABC, *se coupent deux à deux sur les côtés du triangle* ABC *en trois points de la droite de Lemoine des triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$.*

En effet, la droite a_2b_1 a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2c \cos A & 2b \cos A \\ 2 \cos C & 1 & 2 \cos A \end{vmatrix} = 0;$$

(*) Cette valeur résulte aussi de ce que a_2 est le symétrique, par rapport à BC, du point de rencontre de la symédiane AK avec la circonférence ABC, ou le symétrique, par rapport à A', du point où la médiane AA' rencontre la circonférence ABC. — Voir *Mathesis*, loc. cit.

elle coupe le côté AB en un point de la droite

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a - 2b\cos C & 2c\cos A - b \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

De même, la droite a_1b_2, qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2c\cos B & b & 2a\cos B \\ 1 & 2\cos C & 2\cos B \end{vmatrix} = 0,$$

coupe le côté AB au même point que la droite

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2c\cos B - a & b - 2a\cos C \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Or

$$\frac{a - 2b\cos C}{2c\cos B - a} = \frac{2c\cos A - b}{b - 2a\cos C} = 1;$$

donc les équations (1) et (2) sont identiques. En tenant compte des égalités $a = b\cos A + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$, on peut écrire les équations (1) et (2) ainsi :

$$\frac{x}{b\cos C - c\cos B} + \frac{y}{c\cos A - a\cos C} = 0.$$

On en conclut que la Pascale de l'hexagone $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$ a pour équation

$$\frac{x}{b\cos C - c\cos B} + \frac{y}{c\cos A - a\cos C} + \frac{z}{a\cos B - b\cos A} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{\sin(A - C)} + \frac{y}{\sin(C - A]} + \frac{z}{\sin(A - B)} = 0.$$

6. Cherchons l'équation du cercle (GH). Si l, m, n sont les puissances des sommets du triangle de référence par rapport à une circonférence, l'équation, en coordonnées barycentriques, de cette courbe est

$$\Sigma\alpha\Sigma l\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe,

$$l = Aa_1 \cdot AH = \tfrac{2}{3} h_a \cdot a\cot g A = \tfrac{4}{3} S\cot g A, \text{ etc.};$$

donc le cercle (GH) est représenté par

$$\tfrac{4}{3} S\Sigma\alpha\Sigma\alpha\cot g A - \Sigma\alpha^2\beta\gamma = 0. \qquad (3)$$

Si l'on observe que

$$a^2 = 2S\,(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C),\ \text{etc.},$$

on peut encore mettre (3) sous les formes

$$2\Sigma\alpha^2 \operatorname{cotg} A - \Sigma\,(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)\,\beta\gamma = 0,$$
$$3\Sigma\alpha^2 \operatorname{cotg} A - \Sigma\alpha\Sigma\alpha \operatorname{cotg} A = 0.$$

De ces équations, on déduit aisément que le cercle orthocentroïdal, le cercle circonscrit au triangle ABC, le cercle des neuf points et le cercle polaire ont pour axe radical commun l'axe orthique de ABC (Voir *Mathesis*, loc. cit.).

Si l'on prend pour triangle de référence le triangle A'B'C', on a

$$l = A'a_2 \cdot A'G = \frac{a^2}{12m_a^2},\ \text{etc.},$$

et le cercle (GH) a pour équation

$$\Sigma\alpha\Sigma\frac{a^2}{3m_a^2}\,\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

SUR LA FORMULE DE LEIBNIZ.

1. Les formules de Leibniz et de Delaunay (*)

$$D^mPQ = PD^mQ + m_1P'D^{m-1}Q + m_2P''D^{m-2}Q + m_3P'''D^{m-3}Q + \text{etc.},$$
$$PD^mQ = D^mPQ - m_1D^{m-1}P'Q + m_2D^{m-2}P''Q - m_3D^{m-3}P'''Q + \text{etc.},$$

où m_1, m_2, m_3, etc. désignent les coefficients du binôme :

$$m_1 = \frac{m}{1},\quad m_2 = \frac{m\,(m-1)}{1.2},\quad m_3 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

ont été généralisées par Pfaff et Genocchi, de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} D^mPQ = PD^mQ &+ m_1P'uD^{m-1}\frac{Q}{u} + m_2DP'u^2D^{m-2}\frac{Q}{u^2} \\ &+ m_3D^2P'u^3D^{m-3}\frac{Q}{u^3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} PD^mQ = D^mPQ &- \frac{m_1}{u}D^{m-1}\,(P'u\,.\,Q) + \frac{m_2}{u^2}D^{m-2}\,(P'u^2\,.\,Q) \\ &- \frac{m_3}{u^3}D^{m-3}\,(P'u^3\,.\,Q) + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(*) D^mPQ désigne ici la dérivée m^e du produit PQ.

Genocchi a démontré ces diverses formules et quelques autres du même genre, non seulement dans le cas où l'indice m est positif et entier, mais encore dans celui où m est fractionnaire et positif, ou entier et négatif. En outre, Genocchi a trouvé les conditions de convergence des séries qui forment le second membre quand le nombre des termes y est illimité (*).

Une curieuse application de la formule (1) contenue dans le travail de Genocchi et l'article de M. Hermite, sur la formule de Delaunay (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, p. 54-55) nous ont engagé à chercher une démonstration élémentaire des formules (1) (2), quand m est entier et positif.

2. En développant les seconds membres, dans les formules (1), (2), on trouve des termes d'une certaine forme, dont les coefficients ne dépendent pas de la nature des fonctions P, Q, u. Pour trouver ces coefficients, il suffira par conséquent de faire les hypothèses $P = e^{px}$, $Q = e^{qx}$, $u = e^{kx}$. On ramène ainsi la vérification des formules (1) (2) à celle des égalités suivantes, obtenues en faisant les substitutions dont il vient d'être question

$$\left.\begin{aligned}(p+q)^m = pp^{-1}q^m + m_1p\,(p+k)^0\,(q-k)^{m-1} \\ + m_2p\,(p+2k)\,(q-2k)^{m-2} + m_3p\,(p+3k)^2\,(q-3k)^{m-3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}q^m = pp^{-1}\,(p+q)^m - m_1p\,(p+k)^0\,(p+q+k)^{m-1} \\ + m_2p(p+2k)(p+q+2k)^{m-2} - m_3p\,(p+3k)^2\,(p+q+3k)^{m-3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

La formule (3), qui est le binôme d'Abel (*Œuvres*, première édition, I, pp. 31-32), peut se déduire de (4), en remplaçant dans celle-ci q par $-(p+q)$, ou $p+q$, par $-q$. Il suffit donc de s'occuper de la formule (4).

(*) A. Genocchi. *Dimostrazione d'una formula di Leibnizio e Lagrangio e di alcune formole affine* (Mémoires de Turin, 2me série, t. XXVI, 1869; 17 p. in-4°). La première formule, due à Leibniz, a été retrouvée par Lagrange, lorsqu'il était encore très jeune. La seconde, que Winkler attribue à Jacobi, dans les *Sitzungsberichte* de Vienne, t. XLVII, p. 174-175, 1863, et qu'il croit n'avoir jamais été publiée, est en réalité bien connue. On la trouve dans un Mémoire de Delaunay (*Journal de Liouville*, t. VI, p. 212, 1841), dans le *Journal de Crelle* (t. LIV, p. 290, 1857; LV, p. 305, 1858) et dans Moigno, *Calcul des variations*, p. 176, 186. La troisième formule, numérotée (1) dans le texte, a été publiée en 1794, par Pfaff, dans les *Archives de Hindenbourg*; enfin la dernière (2), est de Genocchi, à qui nous empruntons les renseignements qui précèdent.

En faisant $q = 0$, dans (4), on trouve, après division par p,

$$0 = p^{m-1} - m_1 (p+k)^{m-1} + m_2 (p+2k)^{m-1} - m_3 (p+3k)^{m-1} + \text{etc.} \quad (5)$$

De même cette dernière relation, pour $k = 0$, devient, après division par p^{m-1} :

$$0 = 1 - m_1 + m_2 - m_3 + \text{etc.} \quad (6)$$

Cette dernière égalité est vraie, car elle équivaut à

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.} = (1-1)^m.$$

Nous allons faire voir que l'égalité (6) entraîne l'égalité (5), celle-ci l'égalité (4), et, par suite (3), (2), (1), en employant un procédé de démonstration identique au fond à celui d'Abel, dans l'article cité plus haut.

3. En dérivant par rapport à k, on déduit de (5) la relation

$$0 = r^{n-1} - n_1 (r+k)^{n-1} + n_2 (r+2k)^{n-1} - n_3 (r+3k)^{n-1} + \text{etc.},$$

où $n = m - 1$, $r = p + k$. Supposons cette égalité vraie. Alors les deux membres de la relation (5), ayant même dérivée par rapport à k, ne peuvent différer que par une constante. Or cette constante est nulle, car pour $k = 0$, d'après (6), le second membre de (5) est égal au premier.

Il résulte de là que la relation (5) est vraie pour une valeur quelconque de m, si elle est vraie pour cette valeur diminuée d'une unité. Or pour $m = 2$, on a :

$$0 = p - 2(p+k) + (p+2k).$$

Par suite, l'égalité (5) subsiste pour $m = 3, 4, 5$, etc., ou pour une valeur quelconque positive et entière.

4. Considérons maintenant l'égalité (4) à vérifier et dérivons par rapport à q. Nous trouvons, en divisant par m, après dérivation,

$$\left.\begin{aligned} q^n = {} & pp^{n-1} (p+q)^n - n_1 p (p+k)^0 (p+q+k)^{n-1} \\ & + n_2 p (p+2k) (p+q+2k)^{n-2} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

n étant encore égal à $n - 1$.

Supposons m la relation (7) exacte. Les deux membres de (4) ayant même dérivée par rapport à q, ne diffèrent que par une constante. Cette constante est nulle, car pour $q = 0$, d'après l'égalité (5) démontrée plus haut, le second membre de (4) est égal au premier. La relation (4) est donc vraie pour une valeur quelconque entière et positive de m, si elle est

vraie pour une valeur inférieure. Or pour $m = 1$, (4) devient une identité

$$q = (p + q) - p.$$

Donc enfin (4) et, par suite (3), (2), (1) subsistent pour m entier et positif. (P. M.).

22 juillet 1876.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons de cinématique et de dynamique suivies de la détermination des centres de gravité à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par X. ANTOMARI, ancien élève à l'école normale, agrégé des Sciences mathématiques, directeur des études et professeur de mathématiques spéciales à l'École Monge. Paris, Nony et Cie, 1892. Un volume in-8° de IV-232 p. in-8° avec 81 figures dans le texte. Prix : 4 fr.

Le nouveau programme d'admission à l'École polytechnique de Paris comprend la cinématique, la dynamique et la statique. L'auteur s'est efforcé d'écrire un manuel qui corresponde à ce programme, sauf qu'en statique il ne traite que la détermination des centres de gravité, renvoyant pour le reste aux leçons de statique de M. Carvallo. L'ouvrage de M. Antomari est un bon livre qui sera utile, non seulement aux candidats pour lesquels il est écrit, mais encore à tous ceux qui veulent acquérir des notions de mécanique. Voici l'indication des matières traitées dans ce livre et quelques observations critiques qui peuvent être faites.

Dans un chapitre préliminaire, l'auteur expose la composition et les produits géométriques de vecteurs.

Le livre I comprend la cinématique du point *matériel* (?). Dans le premier chapitre, la vitesse et l'accélération sont considérées comme des grandeurs algébriques; dans le second chapitre, on les considère comme des vecteurs. La détermination de la vitesse en coordonnées polaires ne nous paraît pas suffisamment expliquée; l'auteur dit que le déplacement AA′ est la somme géométrique de deux autres AI et IA′ et en conclut que la vitesse lim (AA′ : Δt) est la somme géométrique des deux vitesses lim (AI : Δt) et lim (IA′ : Δt). L'auteur aurait dû démontrer dans ses préliminaires que l'on peut diviser les termes d'une équation vectorielle par une même quantité et que l'on peut passer à la limite dans des équations de cette espèce. Le chapitre III est consacré à la détermination de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cartésiennes; le chapitre IV traite des mouvements relatifs et de la composition des mouvements; le chapitre V contient quelques applications.

Le livre II renferme la dynamique du point matériel. Les quatre premiers chapitres contiennent respectivement : 1° les principes généraux; 2° l'application au mouvement des projectiles; 3° la proportionnalité des forces aux accélérations dans le cas des forces constantes; 4° cette même proportionnalité dans le cas général et la composition des forces. La grandeur des forces est définie par l'équilibre; la

proportionnalité des forces aux accélérations est démontrée rigoureusement dans le cas des forces constantes. Dans le cas d'une force variable, l'auteur dit : « Si Δt est très petit, on peut considérer la force comme constante dans cet intervalle, de sorte que sa valeur, en vertu du premier cas, est $m\frac{\Delta v}{\Delta t}$. » Nous ne considérons pas ce raisonnement comme rigoureux. Si l'auteur s'est heurté à cette difficulté, c'est que la définition de la force, qu'il a choisie, ne s'applique qu'aux forces constantes. On pourrait compléter cette définition en suivant les idées de l'auteur; mais que de longueurs on aurait évitées, en adoptant immédiatement comme définition que les forces, constantes ou variables, sont mesurées par des quantités proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent. Dans le chapitre V, on trouve les équations du mouvement d'un point et les problèmes usuels. Le chapitre VI contient le théorème des forces vives. L'auteur définit le travail élémentaire pour un déplacement infiniment petit *ds* du point, en considérant la force comme constante; le travail total est la somme des travaux élémentaires. C'est là un langage d'autant plus incorrect qu'il ne suffit pas ici de sous-entendre le mot limite. Le travail élémentaire tel qu'il est utilisé dans l'équation différentielle des forces vives, n'est ni le travail infiniment petit exact, ni celui qu'on obtient en supposant la force constante; c'est une véritable différentielle que l'on ne peut obtenir qu'en prenant comme déplacement la différentielle de l'arc portée suivant la tangente à la trajectoire. Le chapitre VII traite des forces centrales et du mouvement des planètes, le chapitre VIII du mouvement d'un point sur une courbe et une surface fixes.

Le livre III contient en cinq chapitres la détermination des centres de gravité : d'abord les théorèmes généraux, puis la recherche des centres de gravité des lignes, des surfaces, des volumes, et enfin les théorèmes de Guldin.

Ajoutons que chaque livre est suivi de nombreux exercices, choisis judicieusement de manière que les commençants ne soient pas rebutés par des problèmes trop difficiles. (J. M.).

Cours de géométrie descriptive de l'École militaire par F. CHOMÉ, professeur à l'École militaire de Belgique. Première partie. Livre premier, à l'usage des candidats à l'École militaire et aux écoles spéciales des Universités. Seconde édition. Bruxelles, Castaigne; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893. (Ouvrage autorisé par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen). Un volume in-4° de 159 pages et un atlas in-4° de 37 planches. Prix : 10 francs (*).

I. *Sommaire.* Préface, introduction. Première partie : Projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires. Livre premier. Du point, de la droite et du plan. *Chapitre I* (73 pages). Représentation du point, de la droite et du plan considérés

---

(*) Nous avons communiqué notre compte rendu en épreuve à M. le Professeur Chomé, qui nous a adressé la réponse que nous publions plus bas. C'est aux professeurs qui expérimenteront l'un et l'autre mode d'enseignement de la géométrie descriptive à juger lequel vaut le mieux, celui de Monge et de Brasseur, ou celui de MM. Mannheim et Chomé.

isolément, ou l'un par rapport à chacun des deux autres. 1. Du point. 2. De la droite. 3. Du plan. 4. Conventions relatives à la représentation des figures. 5. Sections planes faites dans les polyèdres. 6. Intersection de deux polyèdres.

Ch. II (36 pages). Rabattements, rotations et changements de plans de projection. 1. Généralités. 2. Rabattements. 3. Rotations. 4. Changement des plans de projection. 5. Remarques, problèmes, applications et exercices.

Ch. III (23 pages). Plus courtes distances entre les points, les droites et les plans. Angles des droites et des plans. 1. Généralités. 2. Des plus courtes distances. 3. Des grandeurs angulaires. 4. Résolution des trièdres.

Appendices (20 pages). 1. Prescriptions à observer pour l'exécution des épures par M. Goedseels(*). 2. Programmes des épures demandées aux examens d'entrée à l'École militaire. 3. Autres programmes d'épures.

II. Voici, d'après la préface de l'auteur, ce qui distingue de la précédente, l'édition actuelle de son ouvrage.

La première édition du cours de M. Chomé a paru en 1886 (Gand, Meyer-Van Loo, 89 p. in-4° et atlas de 34 planches). La nouvelle édition comprend. en plus que la première, les §§ 4, 5, 6 du ch. I et les trois appendices.

La nouvelle édition diffère en outre de la première « par une exposition nouvelle et plus rationnelle des principes... Depuis longtemps, nous nous abstenons de tracer la ligne de terre, dans nos épures, non seulement parce que sa direction seule importe pour la représentation des corps et que dans les applications de la géométrie descriptive aux arts, on ne la dessine jamais; mais encore parce que nous voulons empêcher nos élèves d'avoir constamment recours à l'emploi intempestif des plans de projection. »

« Combien d'élèves sont embarrassés de se servir de plans qui ne seraient pas représentés par leurs traces sur les plans de projection! Combien d'élèves sont embarrassés de chercher l'angle des plans de deux faces d'un polyèdre, quand ils ne peuvent, au préalable, déterminer *dans les limites de l'épure*, les traces de ces plans! »

« Nous avons voulu, dans cette édition, enseigner immédiatement les méthodes telles qu'elles sont employées par les ingénieurs, et nous nous sommes attaché à les établir d'une manière simple et précise, en ne faisant que des conventions parfaitement permises et entièrement d'accord avec nos habitudes. »

Pour rendre plus facile la lecture de son Cours, l'auteur emploie des notations, qui permettent « de toujours parler des figures dans l'espace sans se préoccuper des projections que l'on trace d'après les règles connues... » On dira peut-être que ces notations surchargent les épures élémentaires de lettres, mais « Peut-on sérieusement songer à sacrifier la simplicité du langage, la clarté et la concision dans l'exposition des principes, à une esthétique de figure? » Ces notations qui rendent la lecture du texte beaucoup plus simple sont les suivantes : un point A ou une

(*) Ces prescriptions sont beaucoup trop minutieuses. On peut faire de très bonnes épures à beaucoup moins de frais.

droite L de l'espace ont leurs projections représentées par A^h, A^v et L^h, L^v; de même la projection horizontale d'un plan vertical P, sera désignée par P^V, un *plan de bout* (c'est-à-dire, perpendiculaire au plan vertical) Q aura pour projection verticale Q^H.

La théorie des changements de plan de projection est exposée avec soin. En général, l'exposition des méthodes est accompagnée d'exemples nombreux.

III. Ce qui caractérise le livre de M. Chomé, c'est évidemment la suppression systématique de l'usage de la ligne de terre. Selon nous, cette suppression *prématurée* complique, sans utilité immédiate, l'exposition *graduée* des éléments de la géométrie descriptive (*).

Il nous semble, en outre, que dans cette édition, comme dans la précédente, l'auteur examine *explicitement* un trop grand nombre de cas ou d'exemples particuliers. Ainsi, il en considère 13, dans le problème de l'intersection de deux plans (**).

Mais si l'on admet le point de vue de l'auteur, point de vue plutôt *logique* que *pédagogique*, ces deux critiques tombent et son livre ne mérite plus que des éloges. Nous le signalons donc aux professeurs qui veulent s'initier, dans un bon manuel, au mode d'exposition de la géométrie descriptive recommandé par M. Mannheim en 1882 et adopté depuis cinq ans à l'École militaire et dans un certain nombre des grands lycées de Paris.

P. MANSION.

Réponse au compte rendu de M. Mansion.

Dans le compte rendu que l'on vient de lire, il y a des lacunes, une erreur et des affirmations sans preuves.

I. — *Lacunes.* 1° (pp. 40-42, I et II). Il eût été surtout intéressant de signaler, dans un compte rendu, mieux qu'on ne peut le faire par une copie de la table des matières, ou par un extrait de la préface, ce qui distingue l'ouvrage des manuels analogues. On aurait pu signaler ainsi, non seulement les conventions permettant de supprimer la ligne de terre, les notations employées et la méthode suivie pour

(*) « Il est une maxime aussi sage qu'ancienne : Dans tout enseignement élémentaire, on ne doit jamais courir au devant des difficultés. » (PONCELET).

(**) « Pour représenter, dit l'auteur, une surface quelconque, on représente les figures qui la déterminent, en ayant soin d'ajouter oralement, ou par écrit, comment on peut engendrer la surface au moyen de ces figures. Ainsi un plan est *représenté* par les projections de deux droites qui se coupent ou de deux droites parallèles, ou d'une droite et d'un point, ou de trois points » (p. 27). Selon nous, cela n'est pas exact : ces données *déterminent* le plan, mais ne le *représentent* que si elles font suffisamment image dans l'épure. Un hyperboloïde gauche est *déterminé*, mais non *représenté*, par ses trois directrices rectilignes, accompagnées d'une phrase explicative. N'est-ce pas cette confusion entre *détermination* et *représentation* d'un plan qui a entraîné l'auteur à la considération de beaucoup de cas ou d'exemples particuliers où l'emploi de la ligne de terre est nuisible, puis enfin à la suppression systématique de l'usage de cette ligne ?

les changements des plans de projection, mais encore les *méthodes sûres et générales* données pour résoudre tous les problèmes et particulièrement : pour déterminer, dans la représentation des corps, le *vu* et le *caché;* pour chercher les sections planes et les intersections des polyèdres, pour faire les rabattements et les rotations; pour chercher les plus courtes distances et les grandeurs angulaires.

2° (page 41, ligne 34). Le compte rendu ne dit pas si son auteur partage l'avis de celui qui dirait que nos notations surchargent les épures de lettres. Cet avis n'est certainement pas le nôtre et ceux qui regarderont nos planches seront loin de le partager. Le compte rendu ne dit pas non plus, et c'était un fait important à mettre en évidence, que grâce aux notations employées, les changements des plans de projection se font avec une remarquable facilité.

II. — *Erreur.* (p. 42 **) M. Mansion fait erreur, selon nous, en croyant que nous avons confondu la détermination et la représentation d'un plan; il est évident d'ailleurs que l'on ne peut songer à représenter une figure, avant que celle-ci ne soit entièrement déterminée. La distinction très nette que nous faisons entre la détermination et la représentation d'un plan est du reste clairement indiquée dans notre texte : « Pour représenter une surface quelconque (et par conséquent un plan), on *représente* les figures qui la *déterminent* » On fait cette représentation au moyen d'un dessin géométrique exécuté de façon à satisfaire à la définition de la géométrie descriptive, et cette définition n'exige pas qu'il y ait nécessairement image. L'image est une qualité que l'on ne demande à la représentation que lorsqu'il y a des motifs pour le faire et, pour ce cas spécial, nous donnons au § 4 du chapitre I, les principes à appliquer : nous définissons alors le *vu* et le *caché*, en ayant soin d'éliminer le légendaire observateur dont l'œil est à l'infini, au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical.

Dans l'exemple d'un hyperboloïde gauche de raccordement, déterminé au moyen de trois directrices rectilignes, on représente ces trois directrices, conformément à ce que nous avons dit au n° 42 sur la représentation des lignes, et l'image, que l'on pourrait obtenir par la représentation des contours apparents pour les plans de projection, sera, en général, bien inutile.

Si M. Mansion n'admet que la représentation imagée d'une figure et rejette la représentation pure et simple sur un plan, sans préoccupation de l'image, que fait-il alors de toutes les constructions auxiliaires dans la représentation des corps? Si ces constructions devaient être représentées par des dessins faisant image, on arriverait à des épures monstrueuses, comme celle que l'on obtiendrait si l'on voulait représenter les traces des plans des différentes faces d'un polyèdre.

Nos méthodes ne dépendent pas de la représentation imagée des figures (par conséquent des plans), et c'est ce qui en fait précisément le mérite au point de vue pédagogique.

III. *Affirmations dépourvues de preuves.* 1° (page 41*) Où trouve-t-on, dans les prescriptions rédigées par M. Goedseels, de la minutie inutile? Quelles sont les prescriptions que l'on pourrait utilement supprimer? Toutes ces prescriptions sont les meilleures et les plus simples que l'on puisse observer dans les travaux

graphiques, et leur utilité sautera aux yeux de tous ceux qui connaissent l'importance, pour l'ingénieur, d'une grande précision dans ces travaux. L'École militaire est habituée, depuis sa fondation, à apporter dans l'exécution des épures, toute la perfection possible ; nous avons voulu y maintenir cette habitude et faire connaître au dehors les procédés employés.

2° (page 42, ligne 8). La suppression de la ligne de terre serait prématurée, d'après M. Mansion, et compliquerait, sans utilité immédiate, l'exposition graduée des éléments de la géométrie descriptive.

Selon nous, cette affirmation est inexacte : elle accuse des idées qui ont leur origine dans l'enseignement habituel de la géométrie descriptive, mais que l'on ne justifie pas et que notre ouvrage condamne.

Non seulement la ligne de terre est inutile, comme nous l'avons démontré (n° 34, p. 14 et erratum de la page 157), mais elle est nuisible et il y a utilité à la supprimer dès le début de l'enseignement de la géométrie descriptive.

Elle est nuisible, parce que les auteurs, par la position absolue de la ligne de terre, ont été entraînés à formuler des règles et des méthodes où les traces des plans et des droites interviennent intempestivement, que l'élève n'applique que moyennant la détermination préalable de ces traces et qu'il ne sait plus appliquer quand ces traces sont hors des limites de l'épure.

Les méthodes doivent être indépendantes des données, convenir à tous les cas, et non pas seulement à des cas choisis ; elles doivent être applicables quand on n'a pas ou que l'on ne veut pas chercher les traces des plans et des droites, soit parce que ces traces sont hors de l'épure, soit parce que leur recherche surchargerait l'épure de lignes inutiles ou moins avantageuses que d'autres.

La ligne de terre est encore nuisible, parce que son emploi et l'emploi des traces ayant conduit les auteurs, dans l'étude des méthodes, à prendre des données qui font image (comme dans la représentation d'un plan par ses traces), on habitue les commençants, non pas à raisonner indépendamment des données, mais à raisonner sur des données choisies ; ils prennent une épure pour une espèce de perspective de la figure représentée et quand la représentation ne fait plus image ils ne savent plus résoudre les problèmes alors même qu'ils seraient en possession de méthodes générales, ils croient, ce qui est une grave erreur, que l'épure est plus difficile.

Il y a donc utilité à supprimer la ligne de terre, dès le débit de l'enseignement de la géométrie descriptive. Ce qui précède est confirmé par une longue expérience personnelle acquise à l'École militaire, par l'expérience faite à l'Université de Bruxelles et par celle de plusieurs professeurs qui ont adopté nos méthodes dans l'enseignement moyen.

Poncelet dit qu'il ne faut pas courir au-devant des difficultés. Nous sommes aussi de cet avis ; c'est petit à petit qu'il faut les vaincre, mais c'est précisément ce qui n'est pas fait dans l'enseignement habituel des méthodes de la géométrie descriptive, attendu qu'on n'y donne que des méthodes incomplètes. On fera bien à cet égard, de méditer ce qu'a dit l'illustre Laplace : « Préférez, dans l'enseigne-

« ment, les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus « simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus « faciles. » Nous avons suivi ce précepte et nous avons pu constater que les méthodes générales sont aussi celles que les élèves préfèrent.

3° (page 42, ligne 11). M. Mansion se plaint du trop grand nombre de cas ou d'exemples particuliers et il a tort selon nous. Tout d'abord, il aurait dû distinguer, dans son compte rendu, les cas particuliers des exemples donnés à l'appui de ces cas. En réalité, les 13 cas qu'il a comptés sont 13 exemples qui se rattachent à cinq cas généraux et numérotés, où l'intersection de deux plans se trouve simplement, sans application de la règle générale à suivre pour déterminer cette intersection. Et l'on ne saurait donner, aux commençants, assez d'exemples à l'appui des méthodes; comme nous l'avons dit dans la préface, ces exemples « *ne paraîtront inutiles qu'aux théoriciens, trop peu préoccupés du but que la géométrie descriptive doit atteindre.* »

Du reste, en ce qui concerne la détermination de l'intersection de deux plans, la méthode générale exige, pour ne pas être absurde et inapplicable, l'existence de cas où l'intersection se trouve simplement, et il en résulte que notre critique aurait dû se réjouir de l'existence des cinq cas simples que nous citons, au lieu de s'en plaindre.

Enfin, pour donner aux élèves de l'habileté dans le maniement des projections, nous avons conseillé, une fois pour toutes (n° 93, p. 33), de n'employer les règles générales, « que lorsque la solution du problème proposé ne s'obtient pas plus simplement, à l'inspection des données de la question. » Il était logique, dès lors, de signaler, dans les différents problèmes à résoudre, quelques cas où la règle générale peut ne pas être appliquée.

4° (p. 42, ligne 13). Il ne nous semble pas que notre point de vue soit plutôt *logique* que *pédagogique*. Nous avons eu un égal souci de la *rigueur scientifique* et de la *simplicité pédagogique*, et si, à ce double point de vue, nous avions connu un système meilleur que celui que nous publions, nous l'eussions certainement adopté, car nous n'avons aucun parti pris. Mais nous engageons vivement tous ceux qui enseignent la géométrie descriptive, à essayer, dès le début, la suppression de la ligne de terre : l'expérience sera décisive.

Certes, la suppression de la ligne de terre dérangera bien des habitudes acquises depuis longtemps, et nous entendrons encore, sans aucun doute, les protestations de quelques représentants d'un enseignement qui a eu ses auteurs célèbres, mais que nous considérons comme irrémédiablement condamné. Nous sommes au moment d'une évolution complète et heureuse, réclamée par M. Mannheim; nous pensons y avoir aidé en établissant l'enseignement que nous défendons, sur des principes *nouveaux*, *clairs*, *simples* et *logiques* qui en rendent l'étude facile et agréable pour les commençants.

F. Chomé.

*NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Notice sur C. Gerono*, Le 4 novembre 1892 est mort à Paris C. Gerono, qui a dirigé pendant 45 ans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, journal qui rend, depuis un demi siècle, des services éclatants à l'enseignement et à la science.

Il appartenait à une noble famille génoise que ses opinions démocratiques avaient obligée de quitter successivement l'Italie et la Hollande pour se fixer définitivement à Paris, où Gerono naquit le 8 nivôse de l'an VIII. Au concours général de 1815, il remporta le premier prix de mathématiques élémentaires, tandis que son condisciple au lycée Louis-Le Grand, Victor Hugo, obtenait le cinquième accessit de physique. On raconte qu'en apprenant cette nouvelle, Victor Hugo se jeta dans les bras de son camarade en s'écriant : « je serai le Milton de la littérature et tu seras le Newton de la science. »

A peine sorti du collège, Gerono fut envoyé comme professeur, d'abord à Tulle, puis à Vendôme. De 1825 à 1830, il enseigna les mathématiques et la physique à l'école des Pages, à Versailles.

Après la suppression de cette École, on l'envoya comme principal au collège de Lorient, d'où il fut appelé un peu plus tard à Paris, en qualité de professeur à Sainte-Barbe. Dès lors, Gerono ne quitta plus Paris, où il donna des leçons dans la plupart des établissements d'instruction publique. Jamais carrière de professeur ne fut plus pleinement et plus dignement remplie; il a prodigué ses soins à plus de soixante générations d'élèves, dont beaucoup sont restés ses amis et qui tous emportaient une profonde estime pour son caractère et son talent.

Gérono a inséré un grand nombre d'articles très remarquables dans les *Annales de Gergonne* et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Il a écrit, en outre, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, plusieurs ouvrages qui se recommandent par une clarté et une précision peu communes : un *Traité de statique*, un *Traité de trigonométrie*, un *Traité de géométrie analytique* (en collaboration avec M. Delisle) et un *Traité de géométrie descriptive* (en collaboration avec M. Cassanac). (D'après la notice de M. Rouché dans les *Nouvelles Annales*, décembre 1892).

2. *Sur le plan.* Dans le cinquième livre de géométrie de Legendre, il y a une lacune entre la deuxième et la troisième proposition ainsi conçues :

II. *Deux lignes droites qui se coupent sont dans un même plan, et en déterminent la position.* COROLLAIRE. *Trois points, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan.*

III. *Si deux plans se coupent, leur intersection commune sera une ligne droite.* « Car, si dans les points communs aux deux plans, on en trouvait trois qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans dont il s'agit, passant chacun par ces trois points, ne feraient qu'un seul et même plan, ce qui est contre la supposition. »

Il y a évidemment nécessité d'intercaler entre ces théorèmes une proposition ainsi conçue : *Deux plans ne peuvent pas n'avoir qu'un point de commun.*

On demande la démonstration de cette proposition. (DELBŒUF.)

Voici, en substance, comment cette lacune a été comblée dans la sixième édition du *Traité de Géométrie* de ROUCHE et de COMBEROUSSE (*Géométrie de l'Espace*, pp. 2-3, n° 489).

Soient P et p deux plans ayant un point A commun. Menons par A, dans P, la droite BAC, dans p la droite bAc. Les droites BAC, bAc se croisent, par suite, BAC traverse le plan p en A, et les points B et C sont l'un d'un côté, l'autre, de l'autre côté de p. Une seconde droite B'AC' menée dans P traversera encore p en A ; B' et C' seront de nouveau de part et d'autre du plan p. Joignons B'C, B' et C étant choisis l'un d'un côté, l'autre, de l'autre côté du plan P. Cette droite du plan P rencontrera p en un point a différent de A. Donc l'intersection des plans P et p comprendra les deux points A et a(*). etc. (P. M.)

3. *Sur la construction d'une moyenne proportionnelle.* La construction rappelée par MM. Catalan et Lemoine (*Mathesis*, (2), II, pp. 250 et 275; (2), III, p. 32) se rencontre déjà dans une lettre de Thomas Strode, datée du 3 novembre 1684 et insérée dans le traité d'algèbre de Wallis (*A Treatise of Algebra both historical and practical : London*, 1685).

(*) Cette démonstration suppose démontrée, bien entendu, la proposition suivante : *Deux droites qui ont un point commun, se traversent réciproquement.* Dans le mode d'exposition adopté par Euclide, on peut établir cette proposition, en partant de son quatrième postulat : *Tous les angles droits sont égaux.*

La traduction latine de cette lettre figure dans les *Johannis Wallisii Opera Mathematica*, t. I, pp. 299-301 (1693).

Nous devons cette obligeante communication à M. John S. Mackay, professeur à l'Académie d'Edimbourg. Elle se trouve déjà dans une lettre de M. Mackay à M. de Longchamps, reproduite dans le J. M. E., 1885, p. 158.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 17.

(Voir *Mathesis*, (1), I, p. 30).

Si A, B, C *sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles, les trois racines de l'équation*

$$(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

Solution par M. E. Fauquembergue (Mont-de-Marsan). I. *Réalité des racines.* La réalité des racines de cette équation peut se démontrer, comme pour l'équation en S, de bien des manières. La suivante, dont l'idée première appartient à Cauchy, nous paraît être une des plus simples.

Nous supposons $a < b < c$, ce qui est permis à cause de la symétrie.

En désignant par $f(x)$ le premier membre de l'équation, on a

$$f(x) = (x-a)[(x-b)(x-c) - A] - B(x-b) - C(x-c).$$

On prouve aisément que l'équation

$$(x-b)(x-c) - A = 0$$

a deux racines réelles, l'une $m < b$ et l'autre $n > c$.

Substituons à x dans $f(x)$, successivement :

$$-\infty, \quad m, \quad n, \quad +\infty.$$

$f(-\infty)$ a le signe $-$, $f(+\infty)$ a le signe $+$.

Cherchons les signes de $f(m)$ et $f(n)$:

$$f(m) = -[B(m-b) + C(m-c)];$$

Or on a $m < b < c$, donc $f(m) > 0$.

De même,

$$f(n) = -[B(n - b) + C(n - c)];$$

Or on a $n > c > b$; donc $f(n) < 0$.

Il en résulte le tableau suivant :

Valeurs de x : $-\infty$, m, n, $+\infty$;

Signes de $f(x)$: $-$, $+$, $-$, $+$.

Par suite, l'équation $f(x) = 0$ a une racine réelle comprise dans chacun des intervalles formés par la suite

$$-\infty, \quad m, \quad n, \quad +\infty.$$

II. *Calcul du discriminant.* L'équation $f(x) = 0$ étant développée devient

$$x^3 - (a+b+c)x^2 - (A+B+C-ab-bc-ca)x + Aa + Bb + Cc - abc = 0.$$

On sait que le discriminant Δ de l'équation $px^3 + 3qx^2 + 3rx + s = 0$ est $(ps - qr)^2 - 4(pr - q^2)(qs - r^2)$.

On en déduit, pour l'équation proposée, le discriminant

$$\Delta = [9(Aa+Bb+Cc-abc) - (a+b+c)(A+B+C-ab-bc-ca)]^2 - 4[3(A+B+C-ab-bc-ca) + (a+b+c)^2] \times [3(a+b+c)(Aa+Bb+Cc-abc) + (A+B+C-ab-bc-ca)^2].$$

En posant

$$b - c = \alpha, \quad c - a = \beta, \quad a - b = \gamma, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

on trouve d'abord

$$-\Delta = [6(A+B+C) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2][2(A+B+C)^2 + 2A(3a^2 - b\beta + c\gamma) + 2B(3b^2 - c\gamma + a\alpha) + 2C(3c^2 - a\alpha + b\beta) + a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2] - [A(8a-b-c) + B(8b-c-a) + C(8c-a-b) + a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2]^2.$$

Pour effectuer le développement de cette expression, il suffit de calculer les coefficients de A^2, de AB, de A; les autres s'en déduisent par analogie.

On obtient, après avoir fait les réductions et divisé $-\Delta$ par 3,

$$4(A+B+C)^3 + A^2(\alpha^2 + 8\beta\gamma) + 2AB(10\gamma^2 - \alpha\beta) + 2A\beta\gamma(\alpha^2 + 2\beta\gamma) + B^2(\beta^2 + 8\gamma\alpha) + 2BC(10\alpha^2 - \beta\gamma) + 2B\gamma\alpha(\beta^2 + 2\gamma\alpha) + C^2(\gamma^2 + 8\alpha\beta) + 2CA(10\beta^2 - \gamma\alpha) + 2C\alpha\beta(\gamma^2 + 2\alpha\beta) + \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

En groupant *convenablement* les termes, on parvient à mettre cette expression sous la forme :

$$4(A+B+C)^5 - 4(A^5+B^5+C^5) + 4A(A+\beta\gamma)^2 + 4B(B+\gamma\alpha)^2 + 4C(C+\alpha\beta)^2 + (A\alpha+B\beta+C\gamma+\alpha\beta\gamma)^2 + 4AB(5\gamma^2-\alpha\beta) + 4BC(5\alpha^2-\beta\gamma) + 4CA(5\beta^2-\gamma\alpha).$$

Or, si l'on observe que

$$4(A+B+C)^5 - 4(A^5+B^5+C^5) = 12(A+B)(B+C)(C+A),$$

et qu'on tienne compte de la relation $\alpha+\beta+\gamma=0$, on a

$$4(5\gamma^2-\alpha\beta) = (\alpha-\beta)^2 + 19(\alpha+\beta)^2,$$
$$4(5\alpha^2-\beta\gamma) = (\beta-\gamma)^2 + 19(\beta+\gamma)^2,$$
$$4(5\beta^2-\gamma\alpha) = (\gamma-\alpha)^2 + 19(\gamma+\alpha)^2,$$

on peut conclure que l'expression précédente est toujours positive et que par conséquent le discriminant de l'équation proposée est toujours négatif.

Nous avons reçu, depuis longtemps, d'autres solutions de la question 17, moins complètes que la précédente et dues à Van den Broeck et M. Vladimirescu.

×Question 571.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 126.)

Soit

$$P_n = x^{2k} - x^k + 1,$$

k étant égal à 2^{n-1} : 1° *les polynômes* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *sont premiers entre eux, deux à deux;* 2° *dans le produit* $P = P_1P_2 \ldots P_n$, *ordonné suivant les puissances de x, les coefficients sont* $+1, -1$ *ou zéro;* 3° *la variable x étant moindre que l'unité, on a, quand n croît indéfiniment,*

$$\lim P = \frac{1}{1+x+x^2}.$$ (E. CATALAN.)

Solution par MM. JOACHIMESCU et VLADIMIRESCU. 1. Si l'on pose $P_n = 0$, on trouve

$$x^k = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Soit $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$; l'égalité précédente donnera

$$\cos k\alpha + i\sin k\alpha = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

On en conclut

$$k\alpha = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \frac{(6\lambda \pm 1)\,\pi}{3.2^{n-1}},$$

λ désignant un nombre entier quelconque, positif nul ou négatif.

Pour que les polynômes P_n, P_q aient un facteur commun, les équations $P_n = 0$, $P_q = 0$ devraient avoir une racine commune, ce qui exigerait

$$\frac{(6\lambda \pm 1)\,\pi}{3.2^{n-1}} = \frac{(6\lambda' \pm 1)\,\pi}{3.2^{q-1}};$$

mais le rapport des nombres impairs $6\lambda \pm 1$, $6\lambda' \pm 1$ ne peut être égal à une puissance de 2, etc.

2. En s'appuyant sur l'identité

$$(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^2 + 1,$$

on trouve facilement

$$(x^2+x+1)\,P = (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\cdots(x^{2k}-x^k+1)$$
$$= (x^4+x+1)(x^4-x^2+1)\cdots(x^{2k}-x^k+1) = \cdots = x^{4k}+x^{2k}+1.$$

Donc

$$P = \frac{x^{4k}+x^{2k}+1}{x^2+x+1} = \frac{x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1}{x^2+x+1}. \qquad (1)$$

Effectuons la division indiquée, en ordonnant le dividende et le diviseur suivant les puissances croissantes de x. Si $3p$ est le plus grand multiple de 3 contenu dans 2^n, on trouvera au quotient les termes

$$1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3p}, \qquad (2)$$

et le dividende partiel correspondant est

$$-x^{3p+1} - x^{3p+2} + x^{2^n} + x^{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

Soit d'abord $2^n = 3p + 1$, de sorte que le reste se réduise à

$$-x^{3p+2} + x^{2^{n+1}};$$

en continuant la division, on trouve les autres termes du quotient, savoir

$$-x^{3p+2} + x^{3p+3} - x^{3p+5} + \cdots - x^{2^{n+1}-3} + x^{2^{n+1}-2}. \qquad (3)$$

Si $2^n = 3p + 2$, le polynôme (3) se réduit à

$$-x^{3p+1} + x^{2^{n+1}};$$

en le divisant par $1+x+x^2$, on aura pour les derniers termes du quotient

$$-x^{3p+1}+x^{3p+2}-x^{3p+4}+\cdots-x^{3^{n+1}-3}+x^{3^{n+1}-2}. \qquad (4)$$

Le produit P est donc, ainsi qu'il était à prévoir, un polynôme dont les termes à égale distance des extrêmes ont des coefficients égaux et de même signe. Quand $2^n=3p+2$, il suit une loi tout à fait régulière :

$$P=(1-x)+(x^3-x^4)+(x^6-x^7)+\cdots;$$

si $2^n=3p+1$, les termes sont encore alternativement positifs et négatifs, mais la marche des exposants de x subit un changement au milieu de P.

3. L'égalité (1) donne immédiatement

$$\lim P=\frac{1}{x^2+x+1}, \quad \text{pour } n=\infty.$$

Voir sur les polynomes P_n, CATALAN, *Remarques sur une équation trinôme* (B. B, (1), XIII, 1837) et *Note sur un tableau numérique et son application à certaines transcendantes* (Mém. de l'Ac. de belg.. 1887, XLVII).

Question 780.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 215.)

Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position; son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers. (MOREL.)

Solution géométrique par MM. DROZ et DÉPREZ. Soient A, B les extrémités du diamètre fixe, O le centre, $2a$ et $2b$ les longueurs des axes, $2a'$ et $2b'$ celles des diamètres conjugués donnés, F et F′ les foyers. On a

$$AF+AF'=AF+BF=2a;$$

d'où, en élevant au carré,

$$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2+2AF.\,BF=4a^2. \qquad (1)$$

Mais

$$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=2\overline{OF}^2+2\overline{OA}^2=2(a^2-b^2)+2a'^2. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit

$$AF\,.\,BF=a^2+b^2-a'^2=b'^2.$$

Les points F et F′ décrivent donc une cassinoïde ayant pour foyers les points A, B. Si $a'=b'$, le lieu est une lemniscate de Bernoulli.

Solution analytique par MM. MANDART, DENYS *et* JEŘÁBECK. L'équation de l'ellipse variable rapportée au diamètre fixe OA et à son conjugué, est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Si l'on remplace l'axe des y par la perpendiculaire menée en O sur OA, les formules de transformation sont

$$x=\frac{x'\sin\theta-y'\cos\theta}{\sin\theta},\quad y=\frac{y'}{\sin\theta};$$

la nouvelle équation de la courbe est donc

$$\frac{(x'\sin\theta-y'\cos\theta)^2}{a'^2\sin\theta}+\frac{y'^2}{b'^2\sin^2\theta}=1,$$

d'où, en supprimant les accents devenus inutiles,

$$(a^2+b^2\cos^2\theta)\,y^2-2b^2\sin\theta\cos\theta\,.\,xy+b^2\sin^2\theta\,.\,x^2-a^2b^2\sin^2\theta=0.$$

Identifions cette équation avec l'équation focale

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+t)^2=0;$$

nous aurons d'abord $\alpha=-mt$, $\beta=-nt$, en égalant à zéro les termes du premier degré. Ensuite,

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{1-m^2}=\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{mn}=\frac{b^2\sin^2\theta}{1-n^2}=\frac{a^2b^2\sin^2\theta}{t^2-\alpha^2-\beta^2};$$

remplaçant m, n par $-\frac{\alpha}{t}$, $-\frac{\beta}{t}$, nous obtenons

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{t^2-\beta^2}=\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\alpha\beta}=\frac{b^2\sin^2\theta}{t^2-\alpha^2}=\frac{a^2b^2\sin^2\theta}{t^2(t^2-\alpha^2-\beta^2)}. \qquad (A)$$

Il reste à éliminer t et θ. Si l'on exprime que le produit du premier rapport (A) par le troisième est égal au carré du second, on trouve

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{(t^2-\alpha^2)(t^2-\beta^2)}=\frac{b^2\cos^2\theta}{\alpha^2\beta^2};$$

retranchant ces nouvelles fractions terme à terme, on a

$$\frac{a^2}{t^2(t^2-\alpha^2-\beta^2)}=\frac{b^2\cos^2\theta}{\alpha^2\beta^2}. \qquad (B)$$

Égalant le quatrième des rapports (A) au deuxième, on obtient

$$\frac{a^2\sin\theta}{t^2(t^2-\alpha^2-\beta^2)}=\frac{\cos\theta}{\alpha\beta}. \qquad (C)$$

Des équations (B) et (C), on déduit

$$\alpha\beta = b^2 \sin\theta\cos\theta; \tag{D}$$

donc chacun des rapports (A) est égal à l'unité, et

$$a^2 + b^2\cos^2\theta = t^2 - \beta^2, \quad b^2\sin^2\theta = t^2 - \alpha^2. \tag{E}$$

Les égalités (E) donnent

$$a^2 + b^2\cos 2\theta = \alpha^2 - \beta^2; \tag{F}$$

l'égalité (D) peut prendre la forme

$$2\alpha\beta = b^2 \sin 2\theta. \tag{G}$$

Il est maintenant facile d'éliminer θ; on trouve

$$(\alpha^2 - \beta^2 - a^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = b^4.$$

Remarques. 1° Si l'on élimine b entre les équations (F) et (G) on obtient

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \operatorname{cotg} 2\theta = a^2,$$

équation d'une hyperbole équilatère. Cette courbe est le lieu des foyers des coniques qui ont un diamètre commun AB et mêmes tangentes aux extrémités de ce diamètre; elle passe par les points A et B, et a pour asymptote le diamètre conjugué avec AB; les tangentes en A et B font avec AB l'angle 2φ. (Jeřábeck.)

2° Le lieu des sommets des ellipses considérées par M. Morel a pour équation

$$\rho^4 - \rho^2(2a^2\cos^2\omega + b^2) + a^2\cos^2\omega\,(a^2 + b^2) = 0,$$

$2a$ et $2b$ désignant les longueurs des diamètres donnés.

Le centre du cercle osculateur au point A décrit une droite perpendiculaire à OA.

Le centre du cercle osculateur à l'extrémité du diamètre conjugué avec AB se meut sur une courbe ayant pour équation.

$$y = \frac{a^2 - b^2 + x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

ou

$$\rho^4\cos^2\omega + \rho^2[2a^2\cos^2\omega - b^2(1 + \cos^2\omega)] + (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

(Déprez.)

×Question 798.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 281.)

Démontrer l'identité

$$(a\cos C + z\sin A)(b\cos A + x\sin B)(c\cos B + y\sin C)$$
$$= (a\cos B + y\sin A)(b\cos C + z\sin B)(c\cos A + x\sin C)$$ (MONDART.)

Solution par MM. DELAHAYE *et* LISTRAY. Mettant en évidence les facteurs de x, y, z et observant que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

on ramène les deux membres de l'identité à

$$\sin A \sin B \sin C\,(2R\cos A + x)(2R\cos B + y)(2R\cos C + z).$$

×QUESTION D'EXAMEN.

549. Trouver le poids d'un corps en forme de prisme hexagonal régulier dont la hauteur est sextuple du côté de la base, sachant que ce côté a 6 millimètres de longueur et que la densité du corps est 2,7.

QUESTIONS PROPOSÉES.

810. Soient AA′, BB′ deux diamètres rectangulaires d'un cercle O. D'un point quelconque C de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire CD sur AA′; on porte sur OC une longueur OE = OD, et l'on projette E en F sur AA′. Trouver le lieu du point de rencontre des droites BF et CD.

La figure donne le moyen de construire un angle dont la tangente soit le carré du cosinus d'un angle donné, ou dont le cosinus soit la racine carrée de la tangente d'un angle donné. (P. DECAMPS.)

×**811.** Mettre le produit

$$(1 + x\sqrt{-1})(1 + x^2\sqrt{-1})(1 + x^4\sqrt{-1})(1 + x^8\sqrt{-1})\ldots$$

sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Dans chacun des polynômes P, Q, déterminer les coefficients des puissances de x. Quelle est la loi générale? Déduire, de ce problème, la décomposition de

$$(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})\ldots$$

en une somme de deux carrés. (E. CATALAN.)

×**812**. Soient A, B, C les angles d'un triangle, ω l'angle de Brocard. Démontrer que les différences

$$\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C, \quad \sin^4 B - \sin^2 C \sin^2 A, \quad \sin^4 C - \sin^2 A \sin^2 B$$

sont proportionnelles aux quantités

$$\operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} A, \quad \operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} B, \quad \operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} C.$$

813. Le centre C d'un cercle se meut sur une parabole donnée et le cercle passe constamment par le foyer F de cette parabole. Trouver 1° l'enveloppe de ce cercle ; 2° le lieu du point de rencontre de ce cercle *a*) avec une parallèle à l'axe menée par C ; *b*) avec l'ordonnée de C ; *c*) avec la tangente à la parabole en C ; *d*) avec la normale menée en C. (A. Morel.)

×**814**. Deux triangles sphériques ont leurs côtés proportionels. Les angles du triangle dont les côtés sont les plus petits sont-ils toujours plus petits que ceux de l'autre triangle?

815. Les formules

$$(1) \qquad x = \frac{a_1 t^2 + 2b_1 t + c_1}{at^2 + 2bt + c}, \quad y = \frac{a_2 t^2 + 2b_2 t + c_2}{at^2 + 2bt + c},$$

où t désigne un paramètre variable, définissent une conique. Trouver l'équation de cette courbe en coordonnées cartésiennes et en coordonnées tangentielles. Déduire directement, des formules (1), les conditions nécessaires pour que la courbe soit une ellipse, une circonférence, une hyperbole, un système de deux droites, une parabole. Étant donnée l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

trouver des expressions rationnelles de la forme (1) qui puissent la remplacer.

×**816**. Éliminer x, y, z entre les équations

$$yz(1 - 2x) = \alpha^2 (1 - x)^2, \quad zx(1 - 2y) = \beta^2 (1 - y)^2,$$
$$xy(1 - 2z) = \gamma^2 (1 - z)^2, \quad x + y + z = 1. \quad \text{(D. Besso.)}$$

817. Discuter le lieu de l'équation

$$(x - a) y^2 = (y - b) x^2.$$

818. Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point P sur des quadriques concentriques et homothétiques est aussi le lieu des sommets des tétraèdres autopolaires par rapport à l'une de ces surfaces et à une sphère de centre P, dont le rayon est variable. (Schoute.)

ÉGALITÉS ENTRE QUANTITÉS PROPORTIONNELLES;

par M. Joseph Wastbels, professeur à l'Athénée royal de Hasselt.

Théorème. Si

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'},$$

on a

$$\begin{aligned}&(M\alpha+M'\alpha')(N\beta+N'\beta')(P\gamma+P'\gamma')\\&=(N\alpha+N'\alpha')(P\beta+P'\beta')(M\gamma+M'\gamma')\\&=(P\alpha+P'\alpha')(M\beta+M'\beta')(N\gamma+N'\gamma').\end{aligned}$$

Car ces différentes expressions peuvent s'écrire :

$$\alpha\beta\gamma\left(M+M'\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(N+N'\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(P+P'\frac{\gamma'}{\gamma}\right),$$

$$\alpha\beta\gamma\left(N+N'\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(P+P'\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(M+M'\frac{\gamma'}{\gamma}\right),$$

$$\alpha\beta\gamma\left(P+P'\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(M+M'\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(N+N'\frac{\gamma'}{\gamma}\right),$$

et l'on a

$$M+M'\frac{\alpha'}{\alpha}=M+M'\frac{\beta'}{\beta}=M+M'\frac{\gamma'}{\gamma}\text{ etc.}$$

Remarques. 1° Il est clair que α, β, γ, α', β', γ' pourraient être remplacés par α^n, β^n, γ^n, α'^n, β'^n, γ'^n.

2° On généralise facilement les propositions précédentes pour le cas de plus de trois rapports égaux.

Applications. I. Si a, b, c, A, B, C sont les côtés et les angles d'un triangle rectiligne, on a :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{b^2+c^2-a^2}{\cot A}=\frac{a^2+c^2-b^2}{\cot B}=\frac{a^2+b^2-c^2}{\cot C},$$

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{\cos A}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{\cos B}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{\cos C},$$

$$\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{\sin 2A}=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{\sin 2B}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{\sin 2C},\text{ etc.}$$

On peut, d'après cela, remplacer α, β, γ, α', β', γ' respectivement par

les termes d'une quelconque des suites de rapports égaux qui précèdent, puis donner à M, M', N, N', P, P' des valeurs quelconques ou les laisser indéterminés.

Si l'on pose :

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c, \quad \alpha' = \sin A, \quad \beta' = \sin B, \quad \gamma' = \sin C,$$
$$M = \cos C, \quad N = \cos A, \quad P = \cos B, \quad M' = z, \quad N' = x, \quad P' = y,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}&(a\cos C + z\sin A)(b\cos A + x\sin B)(c\cos B + y\sin C)\\ &= (a\cos A + x\sin A)(b\cos B + y\sin B)(c\cos C + z\sin C)\\ &= (a\cos B + y\sin A)(b\cos C + z\sin B)(c\cos A + x\sin C),\end{aligned}$$

formule qui comprend celle de M. Mandart (*Mathesis*, question n° 798, résolue p. 54). Si l'on fait

$$\alpha = b^2 + c^2 - a^2, \quad \beta = a^2 + c^2 - b^2, \quad \gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$\alpha' = \cot A, \quad \beta' = \cot B, \quad \gamma' = \cot C, \quad M = \operatorname{tg} B, \quad N = \operatorname{tg} C, \quad P = \operatorname{tg} A,$$
$$M' = c^2, \quad N' = a^2, \quad P' = b^2$$

puis que l'on multiplie les deux membres de l'égalité obtenue par

$$\sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C,$$

on trouve :

$$\begin{vmatrix} \{(b^2 - a^2)\sin A \sin B + c^2 \cos(A - B)\} \\ \{(c^2 - b^2)\sin B \sin C + a^2 \cos(B - C)\} \\ \{(a^2 - c^2)\sin A \sin C + b^2 \cos(C - A)\} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \{(b^2 + c^2)\sin A \sin C - a^2 \cos B\} \\ \{(a^2 + c^2)\sin A \sin B - b^2 \cos C\} \\ \{(a^2 + b^2)\sin B \sin C - c^2 \cos A\} \end{vmatrix}$$
$$= \{(c^2 - a^2)\sin^2 A + b^2\}\ \{(a^2 - b^2)\sin^2 B + c^2\}\ \{(b^2 - c^2)\sin^2 C + a^2\}; \text{ etc.}$$

II. Soient a, b, c, A, B, C les côtés et les angles d'un triangle sphérique; on a

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

En posant :

$$\alpha = \sin a, \quad \beta = \sin b, \quad \gamma = \sin c, \quad \alpha' = \sin A, \quad \beta' = \sin B, \quad \gamma' = \sin C,$$
$$M = \cos a, \quad N = \cos b, \quad P = \cos c, \quad M' = \cos A, \quad N' = \cos B, \quad P' = \cos C,$$

le théorème ci-dessus donne

$$\sin(a+A)\cos(a-A)\sin(b+B)\cos(b-B)\sin(c+C)\cos(c-C)$$
$$=(\sin a\cos b+\sin A\cos B)(\sin b\cos c+\sin B\cos C)(\sin c\cos a+\sin C\cos A)$$
$$=(\sin a\cos c+\sin A\cos C)(\sin b\cos a+\sin B\cos A)(\sin c\cos b+\sin C\cos B).$$

Remarque. Si

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'},$$

on a

$$(M\alpha+M'\alpha')(N\beta+N'\beta')=(N\alpha+N'\alpha')(M\beta+M'\beta').$$

Or, dans un triangle sphérique,

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

Donc en posant

$$\alpha=\sin a,\quad \alpha'=\sin b,\quad \beta=\sin A,\quad \beta'=\sin B,$$
$$M=\cos b,\quad M'=\cos a,\quad N=\cos B,\quad N'=\cos A,$$

on obtient

$$\sin(a+b)\sin(A+B)=(\sin a\cos B+\sin b\cos A)(\cos b\sin A+\cos a\sin B).$$

On pourrait encore poser

$$\alpha=\sin a,\ \alpha'=\sin A,\ \beta=\sin b,\ \beta'=\sin B,\ M=\cos A,\ M'=\cos a,$$
$$N=\cos B,\ N'=\cos b;\ \text{etc.}$$

***

On peut écrire un grand nombre d'autres égalités entre quantités proportionnelles; nous en citerons encore une qui nous paraît d'une certaine utilité.

Si

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\delta}{\delta'}=\cdots,$$

on a

$$(M\alpha+N\beta+P\gamma+Q\delta+\cdots)(M'\alpha'+N'\beta'+P'\gamma'+Q'\delta'+\cdots)$$
$$=(M\alpha'+N\beta'+P\gamma'+Q\delta'+\cdots)(M'\alpha+N'\beta+P'\gamma+Q'\delta+\cdots).$$

En particulier,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\cdots)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\cdots)$$
$$=(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\cdots)^2.$$

Cette dernière formule peut trouver son application en géométrie et en trigonométrie.

THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Bordeaux.

1. *Si on connaît les pôles* M_1, M_2 *de deux sécantes* D_1, D_2 *coupant une conique aux points* (A_1, B_1), (A_2, B_2), *on peut obtenir aisément les équations des deux autres couples de sécantes* (A_1A_2, B_1B_2), (A_1B_2, A_2B_1), *ainsi que les coordonnées de leurs centres.*

Soient

$$f=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0$$

l'équation de la conique, et 2X, 2Y, 2Z les dérivées partielles de f par rapport à x, y, z. Désignons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points M_1, M_2 et par X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 les valeurs de X, Y, Z, quand on remplace x, y, z par x_1, y_1, z_1, ou par x_2, y_2, z_2. Les équations des sécantes D_1, D_2 seront

$$xX_1+yY_1+zZ_1=0, \quad xX_2+yY_2+zZ_2=0;$$

nous les représentons en abrégé par $f(01)=0$, $f(02)=0$. La fonction f peut être aussi dénotée par $f(00)$; $f(11)$, $f(22)$ sont les résultats de substitution des coordonnées de M_1, M_2 à la place de x, y, z dans f.

Cela étant admis, l'équation d'une conique quelconque passant par A_1, A_2, B_1, B_2 est

$$f(01)f(02)-\lambda f(00)=0. \tag{1}$$

Si elle représente un système de deux droites, les coordonnées du centre de ce système annulent les dérivées partielles du premier membre de (1); on a donc, pour ces coordonnées,

$$\left.\begin{aligned} X_1f(02)+X_2f(01)-2\lambda X&=0;\\ Y_1f(02)+Y_2f(01)-2\lambda Y&=0;\\ Z_1f(02)+Z_2f(01)-2\lambda Z&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ajoutons ces égalités après multiplication par x_1, y_1, z_1 ou par x_2, y_2, z_2 ; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} f(11)f(02) + [f(12) - 2\lambda]f(01) = 0; \\ f(22)f(01) + [f(12) - 2\lambda]f(02) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Éliminant $f(02)$, $f(01)$ entre ces équations, on trouve

$$f(11)f(22) - [f(12) - 2\lambda]^2 = 0;$$

d'où deux valeurs de λ :

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}[f(12) + \sqrt{f(11)f(22)}], \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}[f(12) - \sqrt{f(11)f(22)}].$$

Appelons H l'intersection des droites D_1, D_2 ; F et G les centres des couples (A_1A_2, B_1B_2), (A_1B_2, A_2B_1). Les coordonnées des points F, G vérifient les équations (2), et par suite, les équations (3), pour $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \lambda_2$; les dernières se réduisent à

$$\sqrt{f(11)}\,f(02) - \sqrt{f(22)}\,f(01) = 0, \qquad (4)$$

$$\sqrt{f(11)}\,f(02) + \sqrt{f(22)}\,f(01) = 0; \qquad (5)$$

elles représentent, respectivement, les droites HF, HG.

Les points F, G sont situés sur la polaire du point H, donc sur la droite M_1M_2. On peut donc désigner les coordonnées de G par

$$mx_1 + nx_2, \quad my_1 + ny_2, \quad mz_1 + nz_2;$$

en portant ces expressions dans l'équation (4), on trouve

$$\sqrt{f(11)}\,[mf(12) + nf(22)] - \sqrt{f(22)}\,[mf(11) + nf(21)] = 0.$$

Par conséquent,

$$m = \sqrt{f(22)}, \quad n = \sqrt{f(11)}$$

et les coordonnées de G sont

$$x_2\sqrt{f(11)} + x_1\sqrt{f(22)}, \quad y_2\sqrt{f(11)} + y_1\sqrt{f(22)}, \quad z_1\sqrt{f(22)} + z_2\sqrt{f(11)}.$$

Celles de F s'obtiennent en changeant le signe de l'un des radicaux.

2. Supposons que x, y, z représentent des coordonnées cartésiennes homogènes. Alors, si M_1, M_2 sont situés sur une conique homothétique et concentrique à la conique donnée, on a $f(11) = f(22)$, et l'on voit facilement, par les expressions de leurs coordonnées, que les points G, F sont, le premier au milieu de M_1M_2, le second à l'infini.

Réciproquement, *si une conique est circonscrite à un trapèze, les pôles*

des côtés non parallèles sont sur une seconde conique homothétique et concentrique à la première.

3. *Les points* A_1, A_2, B_1, B_2, M_1, M_2 *sont situés sur une même conique.* Car, pour faire passer la conique (1) par le point M_1, on doit poser

$$f(11)f(12) - \lambda f(11) = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda = f(12);$$

mais on trouve la même valeur de λ si l'on fait passer la courbe par le point M_2.

La même proposition peut se déduire des théorèmes de Pascal. En effet, les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone $A_1A_2M_2B_2B_1M_1$ sont en ligne droite sur la polaire FH du point G.

4. On peut étendre facilement ces considérations aux quadriques.

Soit $f = 0$ l'équation d'une surface du second ordre, en coordonnées homogènes x, y, z, t, et soient 2X, 2Y, 2Z, 2T les dérivées de f. Les plans polaires de deux points donnés M_1, M_2 coupent cette surface suivant deux coniques C_1, C_2, situées sur toute surface dont l'équation est

$$f(01)f(02) - \lambda f(00) = 0. \tag{1'}$$

Si celle-ci représente un cône, les coordonnées du sommet du cône vérifient les égalités

$$\left.\begin{aligned} X_1 f(02) + X_2 f(01) - 2\lambda X &= 0, \\ Y_1 f(02) + Y_2 f(01) - 2\lambda Y &= 0, \\ Z_1 f(02) + Z_2 f(01) - 2\lambda Z &= 0, \\ T_1 f(02) + T_2 f(01) - 2\lambda T &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

de ces dernières, on déduit comme ci-dessus les relations (3), (4), (5), puis les coordonnées du sommet du cône.

Par conséquent, par les coniques C_1, C_2 on peut faire passer deux cônes, dont les sommets divisent harmoniquement la droite M_1M_2.

Les coniques C_1, C_2 et les points M_1, M_2 sont situés sur une même quadrique. Si M_1 et M sont sur une quadrique concentrique et homothétique à la quadrique donnée, les courbes C_1, C_2 sont situées sur un cône ayant pour sommet le milieu de M_1M_2, et sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à M_1M_2.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×4. *Sur le Théorème de Stewart.* Dans une intéressante notice, publiée dans les *Proceedings of the Edimburgh Mathematical Society*, vol. X, 1891-92, M. Mackay attribue le théorème de Stewart à Robert Simson. Voici un résumé de cette notice.

En 1746, Mathew Stewart, étant candidat à la chaire de mathématiques vacante à l'université d'Édimbourg par suite du décès de Maclaurin, publia son premier ouvrage, les *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics.* Dans la préface, il dit que les théorèmes contenus dans son livre sont entièrement nouveaux, à part un ou deux au plus, mais il ne spécifie pas quels sont ces deux théorèmes.

Voici ces deux propositions :

I. *Si l'on joint le sommet* A *d'un triangle à un point* D *du côté* BC, *et qu'on mène les droites* DE, DF *parallèles à* AC, AB *et rencontrant* AB, AC *en* E, F, *on a*

$$\overline{AD}^2 + BD \cdot CD = AB \cdot AE + AC \cdot AF. \qquad (1)$$

II. *Si l'on joint le sommet* A *d'un triangle* ABC *à un point* D *de la base, on a*

$$\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD = BC \cdot BD \cdot CD + \overline{AD}^2 \cdot BC. \qquad (2)$$

Stewart se sert de la première pour démontrer la seconde; celle-ci porte généralement le nom de *Théorème de Stewart.*

Dans le second livre (p. 156, lemme X) de ses *Loci Plani* publiés en 1749, Simson énonce le théorème suivant :

D *étant un point quelconque de la base* BC *d'un triangle* ABC, *on a*

$$\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD = \overline{BD}^2 \cdot CD + \overline{CD}^2 \cdot BD + \overline{AD}^2 \cdot BC. \qquad (3)$$

Les relations (2) et (3), on le voit sans peine, ne diffèrent pas essentiellement. Simson fait observer que l'égalité (3), quand BD = DC, rentre dans la proposition 122 du livre VII des *Collections* de Pappus. Dans l'appendice des *Loci Plani* (p. 221), il la démontre lorsque les points A, B, C, D sont en ligne droite et dit avoir trouvé ce cas particulier avant le lemme X. Il ajoute que d'autres démonstrations de ce cas lui avaient été communiquées dans le temps par ses anciens disciples,

James Moor et Mathew Stewart, qu'il avait engagés à s'en occuper; que Stewart avait donné une autre démonstration du dernier cas du lemme X dans les deux premières propositions de ses *Some General Theorems*.

Ces extraits des *Loci Plani* et de la préface de Stewart prouvent que la relation (2) appartient à Simson. Il y était parvenu probablement avant 1741; car c'est en cette année qu'il informa Stewart de son intention de publier les *Loci Plani*.

Le théorème de Stewart (ou plutôt de Simson) a été démontré en 1751 par Thomas Simpson dans les *Select Exercices for Young Proficients in the Mathematics;* en 1780, par Euler dans les *Acta Academiae Petropolitanae, Pars I, pp. 92-93;* en 1803, par Carnot, qui en fit ressortir l'utilité.

Chasles, dans l'*Aperçu historique*, en montra l'importance. Enfin, M. Clément Thiry lui a consacré une brochure spéciale (*Applications du Théorème de Stewart et Théorie du Barycentre;* 1891).

5. *Sur la polhodie.* La polhodie dont il a été question p. 15, est le lieu des points de contact d'un plan tangent à l'ellipsoïde assujetti à rester à une distance constante du centre de cette surface. Poinsot n'employait ce terme que dans le cas où l'ellipsoïde est un ellipsoïde d'inertie, c'est-à-dire tel que l'on ait entre les trois axes $2a$, $2b$, $2c$, les relations

$$a > b > c, \quad c^2(a^2 + b^2) > a^2b^2.$$

×6. *Résolution trigonométrique de l'équation* $x^3 + px + q = 0$ (d'après M. Bloume, professeur au lycée Janson-de-Sailly) (*).

1° Si $q > 0$, on pose $x = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$; l'équation devient

$$q\,\mathrm{tg}^3\frac{a}{2} + p\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} + q = 0, \qquad \frac{\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{q}}{-p}, \quad \sin a = \frac{2\sqrt{q}}{-p}.$$

La dernière égalité détermine deux valeurs α et $\pi - \alpha$ (plus généralement $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$); on a ensuite

$$x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \quad x'' = \sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

On vérifie aisément que $x' + x'' = -p$, $x'x'' = q$.

(*) Nous résumons ici un article qui a paru dans le *Journal de Vuibert*, 15 février 1893.

2° Soit $q < 0$; si l'on met le signe de q en évidence et qu'on pose encore $x = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$, l'équation $x^2 + px - q = 0$ se ramène à

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{q}}{p}, \quad \mathrm{tg}\,a = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Si α et $\alpha + \pi$ sont les plus petites solutions de cette équation, on a

$$x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \quad x'' = -\sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE(*).

Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times, by W. W. Rouse Ball, Fellow and Lecturer of Trinity College, Cambridge. Second Edition. London, Macmillan and Co, and New-York, 1892. Un volume cartonné de XII-241 pages in-12. Prix : 7 1/2 sh.

L'auteur, à qui l'on doit déjà une histoire abrégée des mathématiques, une histoire des mathématiques à Cambridge et diverses monographies, a réuni dans son nouvel ouvrage un ensemble de questions curieuses ou intéressantes relatives aux mathématiques pures ou appliquées. Voici un aperçu du contenu de l'ouvrage.

1. ***Questions d'arithmétique***. Questions curieuses. Les nombres parfaits. Les théorèmes de Fermat. 2. ***Questions géométriques***. Paradoxes géométriques (voir un exemple, ***Mathesis***, 1892, (2), I, pp. 161). Problème des cartes géographiques(**). Jeux divers. 3. ***Questions de mécanique*** (mouvement perpétuel, boomerang, etc.). 4. ***Questions diverses*** : le jeu des quinze; tour de Hanoï; anneaux chinois; problème des huit reines; problème des quinze écolières; problèmes divers relatifs à un jeu de cartes. 5. ***Carrés magiques***. 6-7. ***Questions unicursales***. Problèmes des ponts. Labyrinthes. Jeu de Hamilton. Le problème du cavalier au jeu d'échecs. 8. ***Trois questions géométriques***. Duplication du cube. Trisection de l'angle. Quadrature du cercle. Ce chapitre contient de nombreux renseignements historiques. 9. ***Astrologie***. 10. ***Géométrie à plus de trois dimensions et géométrie non euclidienne*** (insuffisant). 11. ***Mesure du temps***. Calendriers divers; fête de Pâques. Cadrans

---

(*) Le temps et la place nous manquent à la fois pour analyser et apprécier en détail les nombreux ouvrages envoyés à la rédaction de ***Mathesis***. Nous devons donc nous contenter d'en donner les titres et les sommaires, ou d'en indiquer la tendance générale. (*Rédaction.*)

(**) « Il suffit de quatre couleurs pour colorier, d'une manière différente, les subdivisions adjacentes d'une carte géographique, pourvu qu'elles se touchent suivant des lignes et non en des points, quelque nombreuses que soient ces subdivisions. » Ce curieux théorème empirique n'a jamais été démontré d'une manière rigoureuse.

solaires, horloges, montres. 12. *Hypothèses sur la constitution de la matière.* Matière continue; hypothèse atomique ancienne; dynamisme de Boscowich; tourbillons de W. Thomson. 13. *Index.*

Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur von Dr. Felix Müller, Professor am K. Luisengymnasium zu Berlin, Mitglied der K. Leopoldinischen Academie. Leipzig, B. G. Teubner (In-8° de IV-104 p.). Prix : 2,40 marcs.

Excellent recueil qui sera le bien venu auprès de tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques, de la physique et de l'astronomie. C'est une espèce de table chronologique des matières contenues dans les meilleurs manuels de l'histoire de ces trois sciences, ceux de Cantor, de Heller et de Wolf, avec l'indication des principaux mémoires ou articles publiés sur chacun des auteurs cités. Chaque paragraphe contient d'abord une date principale, puis une biographie sommaire du géomètre, physicien, ou astronome cité, ensuite l'indication de ses principaux travaux, enfin la bibliographie y relative.

Un juge très compétent, M. Cantor, a fait ressortir l'utilité des Tables chronologiques de M. F. Müller, et en a signalé les deux qualités principales : elles sont exactes et les données qu'elles contiennent sont suffisamment complètes. En les parcourant, il n'y a rencontré que cinq erreurs peu importantes.

Recueil de problèmes de mathématiques, par C.-A. Laisant, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils. Tome I. *Arithmétique; Algèbre élémentaire; Trigonométrie*, 1893. In-8°, VIII-86 pages. Prix : fr. 2-50. Tome V. *Géométrie analytique à trois dimensions (et Géométrie supérieure)*, 1893. Un vol. in-8°, X-95 pages. Prix : fr. 2-50.

Nous avons fait ressortir, à propos du tome IV, les grands services que le Recueil de M. Laisant est appelé à rendre aux élèves, aux professeurs et généralement à tous ceux qui cultivent avec ardeur les mathématiques. Les questions proposées par les journaux périodiques sont intéressantes, non seulement pour l'enseignement, mais aussi pour la science pure; la plupart offrent des difficultés sérieuses. M. Laisant reproduit les énoncés et indique où l'on en peut trouver les solutions. Pour les problèmes non résolus, le journal qui les a proposés publiera les solutions que les lecteurs adresseraient à la Rédaction où à la librairie Gauthier-Villars et fils. *Mathesis* accueillera les solutions des questions proposées par la *N. C. M.*; elle insérera prochainement celles des questions 104, 121, 129, 338, 376, 414, 423, 538.

Le tome I renferme 431 questions, dont 32 se rapportent à l'arithmétique, 138 à l'algèbre élémentaire, 161 à la trigonométrie (rectiligne ou sphérique).

Le tome V du recueil donne les énoncés de 334 questions se rapportant aux figures rectilignes (23), aux figures sphériques (21), aux courbes et surfaces du second ordre (112), aux lieux géométriques (89), aux enveloppes (20), aux courbes et surfaces quelconques (69). (J. N.).

Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire moderne, par M. E. LEBON, agrégé de l'université, professeur de mathématiques au lycée Charlemagne. Paris, Delalain, 1892. — Premier volume, classe de seconde, 5e édition (VIII-136 pages in-8°, avec 178 figures dans le texte) Prix : 3 fr. — Deuxième volume, classe de première (sciences), 4e édition (VIII-320 pages in-8°, avec 277 figures dans le texte et 3 planches gravées hors texte, dont l'une en chromolithographie représente les signes et teintes conventionnels). Prix : 7 fr.

SOMMAIRE DU SECOND VOLUME. — *Géométrie descriptive* (130 pages). — 1. Méthode de changement de plan de projection. — 2. Méthode de rotation. — 3. Résolution de l'angle trièdre. — 4. Ombres des polyèdres. — 5. Intersection de deux polyèdres entre eux. — 6. Lignes courbes. — 7. Surfaces courbes. — 8. Contours apparents des surfaces courbes. — 9. Plans tangents au cylindre et au cône. — 10. Généralités sur les sections planes du cylindre et du cône. — 11. Exemples de section plane du cylindre. — 12. Exemples de section plane du cône. — 13. Plans tangents à la sphère. — 14. Section plane de la sphère. — 15. Sphère inscrite et sphère circonscrite. — 16. Intersection d'une droite et d'une surface. — 17. Ombres du cône, du cylindre et de la sphère.

Géométrie cotée (32 pages). — 1. Plans cotés. — 2. Surfaces topographiques.

Levé des plans (64 pages). — 1. Échelles et instruments de topographie. — 2. Méthodes de levé des plans. — 3. Planimétrie ou arpentage. — 4. Nivellement.

Perspective conique linéaire (48 pages). — 1. Définitions et principes. — 2. Perspective des figures géométrales. — 3. Perspective d'une figure de l'espace. — 4. Méthode de la corde de l'arc. — 5. Construction des ombres.

Perspective cavalière (9 pages). — Définitions, principes et exemples. Construction des ombres en perspective cavalière.

Problèmes gradués à résoudre (187 questions). — Géométrie descriptive (77). — Géométrie cotée (10). — Levé des plans (27). — Perspective conique linéaire (9). — Épures de récapitulation pour les classes de Seconde et de Première (64).

L'auteur fait usage de la ligne de terre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 754.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 32).

Pour que l'équation

$$A_0 z^4 + 4 A_1 z^3 + 6 A_2 z^2 + 4 A_3 z + A_4 = 0$$

puisse prendre la forme

$$\alpha (x + \beta)^4 + \alpha' (x + \beta')^4 = 0,$$

(*) La question 798 (voir p. 54) a été également résolue par MM. Delville et Droz-Farny ; la question 757, par M. Denys ; la question 762, par M. Déprez, avec une remarque reproduisant en partie une question résolue dans la *N. C. M.* t, I, pp. 124 et 196.

il faut que

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

$x+\beta$, $x+\beta'$ *sont les facteurs linéaires de*

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Déduire de ce qui précède une méthode de résolution de l'équation générale du quatrième degré.

Solution par M. Cl. Servais. 1° Posons $z = x + a$ et identifions le premier membre de l'équation transformée avec le développement de l'expression

$$\alpha(x+\beta)^4 + \alpha'(x+\beta')^4,$$

nous aurons

$$A_0 = \alpha + \alpha', \quad A_1 + aA_0 = \alpha\beta + \alpha'\beta',$$
$$A_2 + 2aA_1 + a^2A_0 = \alpha\beta^2 + \alpha'\beta'^2,$$
$$A_3 + 3A_2a + 3a^2A_1 + a^3A_0 = \alpha\beta^3 + \alpha'\beta'^3,$$
$$A_4 + 4aA_3 + 6a^2A_2 + 4a^3A_1 + a^4A_0 = \alpha\beta^4 + \alpha'\beta'^4.$$

On déduit successivement de ces égalités

$$A_0 = \alpha + \alpha', \quad A_1 = \alpha(\beta - a) + \alpha'(\beta' - a),$$
$$A_2 = \alpha(\beta - a)^2 + \alpha'(\beta' - a)^2, \quad A_3 = \alpha(\beta - a)^3 + \alpha'(\beta' - a)^3,$$
$$A_4 = \alpha(\beta - a)^4 + \alpha'(\beta' - a)^4.$$

Posons

$$\beta - a = u, \quad \beta' - a = v;$$

les dernières égalités peuvent s'écrire

$$A_0 = \alpha + \alpha', \tag{1}$$
$$A_1 = \alpha u + \alpha' v, \tag{2}$$
$$A_2 = \alpha u^2 + \alpha' v^2, \tag{3}$$
$$A_3 = \alpha u^3 + \alpha' v^3, \tag{4}$$
$$A_4 = \alpha u^4 + \alpha' v^4. \tag{5}$$

L'élimination de α et α' entre les équations des systèmes [(1), (2), (3)], [(2), (3), (4)], [(3), (4), (5)] conduit aux équations

$$A_2 - A_1(u+v) + A_0uv = 0, \quad A_3 - A_2(u+v) + A_1uv = 0,$$
$$A_4 - A_3(u+v) + A_2uv = 0.$$

Elles seront compatibles si

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0; \qquad (6)$$

et les quantités $-u$ et $-v$ seront les racines de l'équation

$$(A_0A_2 - A_1^2)z^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)z + A_1A_3 - A_2^2 = 0. \qquad (7)$$

Le premier membre de cette équation est donc égal à

$$(A_0A_2 - A_1^2)(z - a + \beta)(z - a + \beta')$$

ou, en tenant compte de la relation $z = x + a$,

$$(A_0A_2 - A_1^2)(x + \beta)(x + \beta').$$

2° Soit l'équation générale

$$f = A_0z^4 + 4A_1z^3 + 6A_2z^2 + 4A_3z + A_4 = 0,$$

on pourra considérer cette équation comme résolue si on parvient à la ramener à la forme

$$\alpha(x + \beta)^4 + \alpha'(x + \beta')^4 + \alpha''(x + \beta)^2(x + \beta')^2 = 0.$$

Le Hessien H de la fonction f sera alors de la forme

$$\gamma(x + \beta)^4 + \gamma'(x + \beta')^4 + \gamma''(x + \beta)^2(x + \beta')^2,$$

et parmi les fonctions $\lambda f + H$, il y en aura au moins une qui aura pour expression

$$\delta(x + \beta)^4 + \delta'(x + \beta')^4.$$

On déterminera la valeur de λ correspondant à cette fonction en égalant à zéro le déterminant (6) des coefficients. L'équation ainsi obtenue sera du troisième degré en λ; λ étant déterminé, les facteurs linéaires $x + \beta$, $x + \beta'$ seront donnés par l'équation (7) relative à la fonction $\lambda f + H$.

M. Emmerich a résolu la même question en identifiant $A_0x^4 + 4A_1x^3 + \cdots$ avec $\alpha(x + \beta)^4 + \alpha'(x + \beta')^4$, et fait observer que le déterminant (6) étant un invariant, aucune transformation linéaire ne peut ramener l'équation proposée à la nouvelle forme, à moins que ce déterminant ne soit nul.

×Question 775.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 176.)

Mettre le nombre $x^{10} - 5^5 y^{10}$, ***où*** x ***et*** y ***sont des nombres entiers positifs, sous la forme d'un produit de trois facteurs rationnels.*** (Éd. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. De l'identité

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

on déduit

$$x^{10} - 5^5 = (x^2 - 5)(x^8 + 5x^6 + 25x^4 + 125x^2 + 625);$$

et, par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve aisément :

$$x^8 + 5x^6 + 25x^4 + 125x^2 + 625$$
$$= (x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 25x + 25)(x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 25x + 25).$$

Il en résulte l'identité

$$x^{10} - 5^5 y^{10} = (x^2 - 5y^2)(x^4 + 5x^3y + 15x^2y^2 + 25xy^3 + 25y^4)$$
$$(x^4 - 5x^3y + 15x^2y^2 - 25xy^3 + 25y^4).$$

×Question 776.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 176.)

Les parallèles menées par un point de l'ellipse de Steiner aux médianes du triangle, rencontrent les côtés opposés sur une droite. Étudier l'enveloppe de cette droite, lorsque le point se déplace sur l'ellipse. (E. Cesáro.)

Solution par A. Droz Farny. Considérons un triangle équilatéral inscrit dans une circonférence. Les parallèles aux médianes de ce triangle par un point quelconque P de la circonférence, coupent les côtés opposés en trois points situés sur la ligne de Simson du point P. L'enveloppe de cette droite est l'hypocycloïde de Steiner. Projetons la figure orthogonalement sur un plan, le triangle devient quelconque, la circonférence devient l'ellipse de Steiner et la courbe demandée est une quartique, projection orthogonale d'une hypocycloïde de Steiner.

M. Déprez a traité très élégamment la même question par le calcul et la généralise en ces termes: *Trouver le lieu d'un point* P *tel, que les parallèles menées par* P *à trois directions fixes rencontrent respectivement les côtés d'un triangle donné* ABC *en trois points d'une même droite et chercher l'enveloppe de cette droite.*

Le défaut d'espace nous empêche de reproduire les développements de M. Déprez, et nous renvoyons à *Mathesis*, (1) II, p. 106.

Question 781.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 215)

Par l'extrémité B ***du diamètre de courbure*** AB ***au point*** A ***d'une hyperbole, on mène sur une asymptote une perpendiculaire, qui coupe en*** K ***la tangente au point*** A. ***Soit*** N ***le point où la normale*** AB ***rencontre la seconde fois l'hyperbole. Démontrer que la droite*** NK ***et la seconde asymptote sont également inclinées sur la normale*** AB. (CL. SERVAIS.)

Solution par M. A. DROZ FARNY. Prenons pour axes de coordonnées la tangente et la normale au point A. L'équation de la courbe sera (voir *Mathesis*, (2) II, p. 177)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0.$$

Soient ρ le rayon de courbure et n la corde normale ; on trouve :

$$\rho = -\frac{f}{a}, \quad n = -\frac{2f}{b}.$$

Les coefficients angulaires des asymptotes sont les racines de l'équation

$$m^2 + \frac{2h}{b}m + \frac{a}{b} = 0.$$

En représentant par α et β les angles de ces droites avec la tangente, on a

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{2h}{b}, \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}.$$

La droite BK a pour équation

$$y + \frac{2f}{a} = -\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{ou} \quad y + \frac{2f}{a} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\beta \cdot x.$$

Pour $y = 0$, on en déduit

$$\mathrm{AK} = -\frac{2f}{b\operatorname{tg}\beta}.$$

En représentant par γ l'angle que forme NK avec la tangente, on a

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AK}} = \frac{-\frac{2f}{b}}{\frac{-2f}{b\operatorname{tg}\beta}} = \operatorname{tg}\beta,$$

ce qui démontre la proposition.

Solution par M. MANDART. Soit O le symétrique du point A par rapport à B, (C) le cercle décrit sur AO comme diamètre. Les parallèles aux asymptotes menées par le point A rencontrent le cercle de courbure en deux points P et Q, tels que la droite PQ est la transformée de l'hyperbole, le point A et le cercle (C) étant les éléments principaux de la transformation (Voir, *Mathesis*, t. VIII, p. 28).

Joignons NK ; la question reviendra à démontrer que cette droite et la ligne AQ forment des angles égaux avec AB. Or l'angle QAB = QPB.

Il restera donc à prouver la similitude des triangles BKN et BPN', N' étant le point commun aux droites AB et PQ. Ce point est le correspondant du point N, donc

$$(AONN') = -1, \quad \text{ou} \quad \overline{BA}^2 = BN.BN'.$$

Mais

$$\overline{BA}^2 = BP.BK;$$

donc

$$\frac{BN'}{BP} = \frac{BK}{BN}.$$

Les triangles BKN et BPN' ayant un angle commun compris entre les côtés proportionnels sont semblables et l'angle BPN' = BAQ = KNA.

NOTE. M. Déprez a donné une solution analytique de la même question et il signale le théorème suivant :

Par l'extrémité B *du diamètre de courbure* AB *au point* A *d'une parabole, on abaisse sur l'axe une perpendiculaire, qui coupe en* K *la tangente menée en* A ; *soit* N *le second point de rencontre de la normale* AB *avec la courbe. La droite* NK *et l'axe de la parabole font avec* AK *deux angles égaux.*

Si l'on connaît le point N, ce théorème permet de trouver le diamètre de courbure AB.

Question 795.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 264.)

Si a est supérieur à (— 1) *on a :*

$$\int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \text{log. nép. } 2. \quad \text{(E. CATALAN.)}$$

Solution par M. P. DELVILLE. On a, en supposant a entier,

$$\int \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \int \frac{x^a(1+x)}{1-x^2}\,dx + \int \frac{2x^{2a+1}}{1-x^2}\,dx.$$

Or

$$\int\frac{x^a(1+x)}{1-x^2}dx=\int\frac{x^a}{1-x}dx=-\int\left(x^{a-1}+x^{a-2}+\cdots+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=-\left[\frac{x^a}{a}+\frac{x^{a-1}}{a-1}+\cdots+\frac{x^2}{2}+x+l(x-1)\right].$$

Nous avons aussi

$$-\int\frac{2x^{2a+1}}{1-x^2}dx=\int 2\frac{x^{2a+1}}{x^2-1}dx=\int 2\left(x^{2a-1}+x^{2a-3}+\cdots+x^3+x+\frac{xdx}{x^2-1}\right)$$
$$=2\left\{\frac{x^{2a}}{2a}+\frac{x^{2a-2}}{2a-2}+\cdot\ +\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}l(x^2-1)\right\}$$
$$=\left\{\frac{x^{2a}}{a}+\frac{x^{2(a-1)}}{a-1}+\cdots+\frac{x^4}{2}+x^2+l(x^2-1)\right\}.$$

On a donc

$$\int\frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}dx$$
$$=\left\{\frac{x^{2a}-x^a}{a}+\frac{x^{2(a-1)}-x^{a-1}}{a-1}+\cdots+x^2-x+l(x^2-1)-l(x-1)\right\}$$
$$=\frac{x^a(x^a-1)}{a}+\frac{x^{a-1}(x^{a-1}-1)}{a-1}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1}+l\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\frac{x^a(x^a-1)}{a}+\frac{x^{a-1}(x^{a-1}-1)}{a-1}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1}+l(x+1)$$

et, par suite,

$$\int_0^1\frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}dx=\log 2.$$

Solution par M. H. MANDART. Si $\lim\varepsilon=0$, $\lim\eta=1$, on a

$$\int_0^1\frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}=\lim\int_\varepsilon^\eta\left[\frac{x^adx}{1-x}-\frac{2x^{2a+1}dx}{1-x^2}\right].$$

En posant $1-x=y$ dans la première intégrale, $1-x^2=z$ dans la on trouve

$$\int_\varepsilon^\eta\frac{x^adx}{1-x}=-\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta}(1-y)^a\frac{dy}{y};\ \int_\varepsilon^\eta\frac{2x^{2a+1}dx}{1-x^2}=-\int_{1-\varepsilon^2}^{1-\eta^2}(1-z)^a\frac{dz}{z}.$$

On a ensuite

$$(1-y)^a\frac{1}{y}=\frac{1}{y}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}y-\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}y^2+\text{etc.},$$

$$(1-z)^a\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}z-\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}z^2+\text{etc.}$$

Ces deux séries sont convergentes et intégrables si leurs termes vont en décroissant en valeur absolue. Pour cela, il suffit que l'on ait

$$-\frac{a-n+1}{n}z<1,\quad -\frac{a-n+1}{n}y<1,$$

c'est-à-dire

$$z-\frac{a+1}{n}z<1,\quad y-\frac{a+1}{n}y<1.$$

Comme z et y sont inférieurs à l'unité u, ces conditions sont vérifiées dans l'hypothèse $a+1>0$. Les deux intégrales deviennent donc

$$-\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta}\left[\frac{1}{y}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}y-\cdots\right]dy+\int_{1-\varepsilon^2}^{1-\eta^2}\left[\frac{1}{z}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}z-\right]dz$$

$$=-\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta}\frac{dy}{y}+\int_{1-\varepsilon^2}^{1-\eta^2}\frac{dz}{z}+\mathrm{R}=\log\left(\frac{1-\eta^2}{1-\varepsilon^2}\right)-\log\left(\frac{1-\eta}{1-\varepsilon}\right)+\mathrm{R}$$

$$=\log\left(\frac{1+\eta}{1+\varepsilon}\right)+\mathrm{R},$$

R désignant une expression qui a évidemment zéro pour limite, quand ε tend vers zéro, et η vers l'unité. On a donc, pour la valeur de l'intégrale donnée,

$$\lim\log\frac{1+\eta}{1+\varepsilon}=\log 2.$$

Autre solution. On a

$$\int_\varepsilon^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_\varepsilon^\eta\frac{2x^{2a+1}dx}{1-x^2}=\int_\varepsilon^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_{\varepsilon^2}^{\eta^2}\frac{t^a dt}{1-t}$$

$$=\int_\varepsilon^{\eta^2}\frac{x^a dx}{1-x}+\int_{\eta^2}^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon\frac{t^a dt}{1-t}-\int_\varepsilon^{\eta^2}\frac{t^a dt}{1-t}$$

$$=\int_{\eta^2}^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon\frac{t^a dt}{1-t}.$$

Or, quand x varie de η^2 à η, et t de ε^2 à ε,

$$\eta^{2a} < x^a < \eta^a; \quad \frac{1}{1-\varepsilon^2} < \frac{1}{1-t} < \frac{1}{1-\varepsilon};$$

$$\eta^{2a}\frac{dx}{1-x} < \frac{x^a dx}{1-x} < \eta^a \frac{dx}{1-x}; \quad \frac{t^a dt}{1-\varepsilon^2} < \frac{t^a dt}{1-t} < \frac{t^a dt}{1-\varepsilon};$$

$$\eta^{2a}\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{dx}{1-x} < \int_{\eta^2}^{\eta}\frac{x^a dx}{1-x} < \eta^a \int_{\eta^2}^{\eta}\frac{dx}{1-x};$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} t^a dt < \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon}\frac{t^a dt}{1-t} < \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} t^a dt.$$

D'ailleurs

$$\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{dx}{1-x} = \log\left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta}\right) = \log(1+\eta), \quad \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} t^a dt = \frac{\varepsilon^{a+1}-\varepsilon^{2a+2}}{a+1}.$$

Donc

$$\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{x^a dx}{1-x} = M\log(1+\eta), \quad \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon}\frac{t^a dt}{1-t} = m\left\{\frac{\varepsilon^{a+1}-\varepsilon^{2a+2}}{a+1}\right\},$$

M étant intermédiaire entre η^2 et η, m entre $(1-\varepsilon)^{-1}$ et $(1-\varepsilon^2)^{-1}$. Si ε tend vers 0 et η vers l'unité, les deux intégrales ont respectivement pour limites log 2 et 0, ce qui démontre le théorème.

L'intégrale donnée appartient à la catégorie des *intégrales frullaniennes* et le procédé employé ici pour en déterminer la valeur est dû à Schaar. Voir notre *Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*; seconde année, p. 159-160. (P. M.)

Question CCCCXI.

(*N. C. M.*, t. IV, p. 303 et p. 357.)

Les circonférences ayant pour diamètres les segments déterminés, sur les axes, par la normale et par la tangente en M, *à une ellipse, se coupent en un second point* M'. *Le rayon de courbure en* M *est vu, du point* M', *sous un angle droit.* (Mennesson.)

Solution par M. E. N. Barisien. Si φ désigne l'angle d'anomalie

excentrique en M, les équations des deux circonférences (*) sont

$$x^2+y^2-\frac{c^2x}{a}\cos\varphi+\frac{c^2y}{b}\sin\varphi=0, \tag{1}$$

$$x^2+y^2-\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=0. \tag{2}$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a pour l'équation de l'axe radical des deux circonférences :

$$bx\sin\varphi+ay\cos\varphi=0. \tag{3}$$

En résolvant (1) et (3), on trouve pour les coordonnées du point M' :

$$x=\frac{ac^2\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\qquad y=-\frac{bc^2\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}. \tag{4}$$

Or, les coordonnées de M sont

$$x_1=a\cos\varphi,\quad y_1=b\sin\varphi; \tag{5}$$

et celles du centre de courbure C sont

$$\xi=\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi,\quad \eta=-\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi. \tag{6}$$

Le coefficient angulaire de la droite MM' a pour expression

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}\left[\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+c^2}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi-c^2}\right].$$

On trouve aussi, pour le coefficient angulaire de M'C,

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}\left[\frac{b^2(1-\sin^4\varphi)-a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi-a^2(1-\cos^4\varphi)}\right]$$

$$=-\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}\left[\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi-c^2}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+c^2}\right].$$

On a bien

$$\left(\frac{y_1-y}{x_1-x}\right)\cdot\left(\frac{\eta-y}{\xi-x}\right)=-1.$$

L'angle MM'C est donc droit.

(*) M. Barisien substitue ici aux segments déterminés, sur les axes, par la normale et la tangente, les segments déterminés par les axes sur la normale et sur la tangente. Mais les deux circonférences de M. Mennesson et celles de M. Barisien passent par un même point. (J. N.)

Remarque. Cette propriété permet de construire facilement le centre de courbure en M.

On prend les milieux ω et ω' des segments de la tangente et de la normale interceptés par les axes; puis on prend le symétrique M' du centre O de l'ellipse, par rapport à la droite $\omega\omega'$: on élève en M' une perpendiculaire à MM', qui rencontre la normale en M au point C, lequel est le centre de courbure relatif au point M.

Solution géométrique. Soient N, N' les points où la normale en M coupe les axes AA', BB' de l'ellipse; T, T' ceux où la tangente en M les rencontre. Considérons une seconde normale mnn', qui coupe AA', BB' en n, n'. On sait que

$$\frac{MN}{MN'} = \frac{mn}{mn'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Par conséquent, les droites MN, mn et les droites Mm, Nn, N'n' qui interceptent des segments proportionnels sur MN et mn, sont tangentes à une même parabole. Lorsque m se rapproche indéfiniment de M, le point d'intersection de MN avec mn a pour limite le centre de courbure C en M; donc la normale MN, la tangente TT' et les axes sont des tangentes à une même parabole (P) qui touche MN en C.

O et M étant les sommets de deux angles droits circonscrits à (P), OM est la directrice de (P); le foyer M' est à l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles MNT, ONN', MN'T', OTT' formés par trois tangentes de (P). Le segment MC d'une tangente compris entre la directrice et son point de contact est vu du foyer M' sous un angle droit. (C. Q. F. D.)

Voici quelques remarques intéressantes.

1° OT, MN' étant deux hauteurs du triangle N'TT' T'N est la troisième hauteur; M' est le point de rencontre de T'N avec TN'.

2° Le lieu de M' est une courbe inverse de l'ellipse proposée par rapport à son centre. En effet, si l'on élimine φ entre les équations (4), on trouve

$$(x^2+y^2)^2 = c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right), \quad \text{ou} \quad \rho^2 = c^4\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right).$$

3° La droite CM', perpendiculaire MM', rencontre TT' en un point U, qui est le point de contact de TT' avec la parabole (P). U est le centre de courbure de l'hyperbole homofocale avec l'ellipse donnée et passant par M.

4° Comme M. Mennesson l'a fait observer, son théorème conduit facilement aux solutions des problèmes suivants :

Trouver les axes d'une ellipse, connaissant un point M, le cercle osculateur en ce point et soit le centre O, soit l'un des axes. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

550. On donne un cercle de centre O et de rayon r; sur un rayon OA comme diamètre, on décrit un cercle de centre O' et de rayon $\frac{1}{2}r$. Déterminer sur un rayon OB perpendiculaire au rayon OA le centre O'' d'un troisième cercle tangent aux deux autres. Faire voir que le quatrième sommet O''' du rectangle construit sur OO', OO'' est le centre d'un quatrième cercle tangent aux trois premiers.

(*Baccalauréat*, Poitiers, 1892.)

Le cercle O'' a pour rayon $x = \frac{1}{3}r$; car le triangle OO'O'' donne

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} + (r - x)^2.$$

551. On donne deux circonférences O, O' et un point P; mener aux deux circonférences deux tangentes parallèles, telles que le rapport des distances du point P aux deux tangentes soit égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$.

Cette question, proposée dans le J. M., 1881 et résolue dans le numéro de février 1893 de J. M. E (p. 36), admet une solution très-simple. Soient S le centre de similitude des deux cercles, et Q, Q' les intersections de la droite SP avec les tangentes demandées. On a

$$SQ : SQ' = R : R', \quad PQ : PQ' = m : n.$$

Les droites QO, Q'O' sont parallèles. Menons PA parallèle à QO et rencontrant OO' en A; nous aurons

$$AO : AO' = m : n.$$

Cette proportion sert à déterminer le point A. Ce point étant connu, on trace OQ, OQ' parallèles à PA, et par Q, Q', on mène des tangentes. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

819. Étant donnés un cercle O et un point A sur la circonférence, on mène une corde quelconque AB, que l'on prolonge de BL = AB.

1° Trouver l'enveloppe de la circonférence M décrite sur BL comme

diamètre. 2° Donner une construction géométrique des points P, R où la circonférence M touche son enveloppe. 3° Chercher le lieu du point d'intersection N des tangentes menées en ces points P, R. 4° Déterminer l'enveloppe de la ligne MN. 5° Trouver l'enveloppe de l'axe radical de la circonférence M avec celle que décrit son centre. (MANDART.)

×**830.** Démontrer que $x-2$ est facteur de

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & x & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

et trouver les autres facteurs.

(*Collège d'Aberystwyth*, examens de décembre 1892.)

×**831.** Discuter la fonction

$$y=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x},$$

x variant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$.

×**832.** Saient AB, CD deux diamètres rectangulaires d'une circonférence. On prend les arcs ACB', BCA' égaux au diamètre AB, puis les arcs A'CB'', B'CA'' égaux à la corde A'B''; puis les arcs A''CB''', B'''CA''' égaux à la corde A''B''; et ainsi de suite. Dèmontrer que la quantité

$$AB - A'B' + A''B'' - A'''B''' + \cdots$$

a pour limite le quart de la circonférence donnée. (L. DE LANTSHEERE.)

833. Étant donnés deux axes Ox, Oy, on prend sur une perpendiculaire élevée à Ox en O les segments $OM = OM' = l$, et sur une perpendiculaire élevée à Oy en O les segments $ON = ON' = l$. On marque sur Ox un point A et sur Oy un point B tels que le produit $OA \cdot OB = l^2$.

Les points A, B étant supposés variables, trouver les lieux décrits par les points de rencontre des droites

(NB, MA), (N'B, M'A), (NB, M'A), (NA, MB), (N'A, M'B).

(LABENNE.)

*824. Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle tel que la somme des distances du centre du cercle aux trois côtés du triangle soit égale à une longueur donnée m.

Discuter le problème et indiquer si le centre du cercle se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle correspondant à une solution déterminée.

On prendra pour inconnue la distance du centre aux deux côtés égaux.

(*Baccalauréat*, Rennes 1892.)

825. La formule (*) $N = 1 + x + x^2$ donne les nombres premiers 3, 7, 13, 31, 43, 73, 157, 193... En donne-t-elle une infinité ?

(E. CATALAN.)

826. Démontrer la formule

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^6}{1-q^6} - \frac{q^7}{1-q^7} - \frac{q^8}{1-q^8} + \frac{q^{10}}{1-q^{10}} + \cdots$$
$$= q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \cdots (**).$$

(BASCHWITZ.)

Dans le premier membre, la fraction $\frac{q^a}{1-q^a}$ est prise avec le signe + ou avec le signe −, selon que a est le produit d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteur premiers. Il y a exception pour le premier terme.

827. On joint un point M d'une ellipse à un des sommets A du grand axe. Du point P, pôle de MA par rapport à l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire PQ sur la parallèle au grand axe passant par M, et une perpendiculaire PR sur la parallèle au petit axe passant par le point M', symétrique de M par rapport au centre. Le rectangle des segments PQ et PR est équivalent à celui formé par l'ordonnée et l'abscisse du point M, relatives aux axes. (E. N. BARISIEN.)

Rectification. Page 10, les lettres O et I désignent le même point, le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

(*) Dans cette formule, on peut supposer x *non-carré*. (E. CATALAN.)

(**) Cette formule est peut être la plus remarquable que l'on ait rencontrée dans la théorie des *Séries elliptiques*. On peut la démontrer d'une manière fort simple. (E. CATALAN.)

SUR L'HYPERBOLE DE FEUERBACH(*).

1. Sur les médiatrices A'O, B'O, C'O du triangle ABC, prenons trois longueurs égales,

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

toutes trois vers O ou dans le sens opposé, et traçons le triangle $P_aP_bP_c$.

Les perpendiculaires abaissées de P_a, P_b, P_c sur BC, CA, AB concourant en un même point O, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du triangle $P_aP_bP_c$ concourent également en un même point P. Nous allons étudier le lieu décrit par P lorsque λ varie.

On a vu (*Mathesis*, (2), III, 10) que les côtés du triangle $P_aP_bP_c$ enveloppent trois paraboles π_a, π_b, π_c ayant pour directrices les bissectrices A'I', B'I', C'I' du triangle A'B'C' et pour foyers les projections de O sur les bissectrices AI, BI, CI du triangle ABC. Si l'on mène par un même point des parallèles aux côtés du triangle $P_aP_bP_c$, ces parallèles se correspondent dans trois faisceaux qui sont projectifs avec les ponctuelles décrites par P_a, P_b, P_c(**) et, par suite, projectifs entre eux. Il en résulte que les droites AP, BP, CP sont des rayons homologues de trois faisceaux projectifs; leur point d'intersection P décrit donc une conique ε passant par A, B, C. A $\lambda = 0$ correspond l'orthocentre H de ABC; lorsque λ augmente indéfiniment, les triangles OP_bP_c, OP_cP_a, OP_aP_b tendent à devenir isoscèles, et les droites AP, BP, CP ont pour limites les bissectrices de ABC. Par conséquent, ε est l'hyperbole équilatère passant par A, B, C, I.

2. Cherchons les coordonnées de P. Les coordonnées normales y, z de P sont entre elles comme sin PAC, sin PAB; les angles PAC,

---

(*) Cet article est rédigé, en grande partie, d'après une note manuscrite de M. Mandart. L'hyperbole dont il est ici question a été signalée par M. Lemoine (*Ass. fr. pour l'Av. des Sciences, Congrès de Paris*, 1889, p. 203); et par M. Boutin (*J. M. S.*, 1890, pp. 104 et 124). Nous en avions également commencé l'étude à la suite de la lecture de l'article de M. Fuhrmann *Sur un nouveau cercle associé au triangle* (*Mathesis*, t. X, pp. 105-111). (J. N)

(**) Lorsque P_bP_c roule sur la parabole π_a, elle marque sur la tangente OA' et sur la droite de l'infini des ponctuelles projectives, etc.

PAB ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux des angles OP_bP_c, OP_cP_b, on a

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin OP_bP_c}{\sin OP_cP_b} = \frac{OP_c}{OP_b} = \frac{R\cos C - \lambda}{R\cos B - \lambda}.$$

On peut donc poser

$$x = \frac{\rho}{R\cos A - \lambda}, \quad y = \frac{\rho}{R\cos B - \lambda}, \quad z = \frac{\rho}{R\cos C - \lambda}, \qquad (1)$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

Si l'on élimine λ, ρ entre les trois relations (1), on trouve pour le lieu de P :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{\cos B - \cos C}{x} + \frac{\cos C - \cos A}{y} + \frac{\cos A - \cos B}{z} = 0, \qquad (2)$$

ou encore

$$\frac{(b-c)(p-a)}{x} + \frac{(c-a)(p-b)}{y} + \frac{(a-b)(p-c)}{z} = 0.$$

Toute conique circonscrite au triangle ABC peut être regardée comme la transformée inverse d'une droite. Les points H, I ayant pour inverses O, I, *l'hyperbole ε est la transformée inverse de la droite* OI. Cette propriété résulte aussi immédiatement de l'équation (2).

3. Soient α, β, γ les points où le cercle inscrit au triangle ABC touche les trois côtés. Prenons sur $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ trois distances égales

$$IQ_a = IQ_b = IQ_c = \mu.$$

Lorsque μ varie, les droites AQ_a, AQ_b, AQ_c se coupent en un même point Q, situé sur l'hyperbole ε. En effet, les points Q_b, Q_c décrivent des ponctuelles égales ; donc les droites BQ_b, CQ_c se correspondent dans deux faisceaux projectifs et leur point d'intersection décrit une conique passant par les centres B, C des deux faisceaux, par I ($\mu = 0$), par H ($\mu = \infty$) et par A ($\mu = -r\,\text{séc}\,A$; Q_b et Q_c sont à l'intersection de AB avec $I\beta$, et de AC avec $I\gamma$). Le point de rencontre de AQ_a, BQ_b décrit une conique passant par les mêmes points A, B, C, H, I ; donc AQ_a, BQ_b, CQ_c concourent

en un même point Q, et le lieu de Q est l'hyperbole trouvée ci-dessus.

Cherchons les coordonnées normales x, y, z de Q. Si x', y', z' sont celles de Q_a, on trouve, en projetant le contour $Q_aI\beta$ sur y', et $Q_aI\gamma$ sur z' :

$$y' = r + \mu \cos C, \quad z' = r + \mu \cos B.$$

Comme $y : z = y' : z'$, on peut poser

$$x = \frac{\rho'}{\mu \cos A + r}, \quad y = \frac{\rho'}{\mu \cos B + r}, \quad z = \frac{\rho'}{\mu \cos C + r}, \qquad (3)$$

valeurs qu'on ramène aux formules (1) en faisant

$$\rho = \frac{R\rho'}{\mu}, \quad \lambda = -\frac{rR}{\mu}.$$

A l'hypothèse $\mu = r$ correspond le *point de Gergonne*, intersection des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; l'hypothèse $\mu = -r$ donne le *point de Nagel* ν, intersection des droites joignant A, B, C aux secondes extrémités α_1, β_1, γ_1 des diamètres αI, βI, γI du cercle inscrit(*). Les valeurs $\mu = \pm r$ correspondent à $\lambda = \mp R$. Si l'on prend A'B'C' pour triangle de référence et qu'on le désigne par ABC, on a donc le théorème suivant :

Sur les hauteurs HA, HB, HC *d'un triangle* ABC, *on prend les longueurs* AR_a, BR_b, CR_c *et, dans le sens opposé, les longueurs* AR'_a, BR'_b, CR'_c *égales au diamètre du cercle circonscrit. Les côtés du triangle* $R_aR_bR_c$ *sont respectivement perpendiculaires aux droites joignant* A, B, C *aux points de contact des côtés de* ABC *avec le cercle inscrit; les côtés du triangle* $R'_aR'_bR'_c$ *sont perpendiculaires aux droites joignant* A, B, C *aux points de contact des côtés avec les cercles exinscrits correspondants*(**).

(*) La droite $A\alpha_1$ rencontre BC au point de contact α' de BC avec le cercle exinscrit I_a ; car A est le centre de similitude externe des cercles I, I_a, dont $I\alpha_1$, $I_a\alpha'$, sont des rayons parallèles.

(**) M. Boutin signale encore quelques autres autres points remarquables de l'hyperbole ABCI :

1° Le point J_3, qui a pour coordonnées normales cotg $\frac{1}{2}$A, cotg $\frac{1}{2}$B, cotg $\frac{1}{2}$C, est le point de Lemoine du triangle $I_aI_bI_c$; il correspond à

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{r} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\left(R + \frac{1}{2}r\right);$$

2° Un point ψ, ayant pour coordonnées normales [1 : (cos B + cos C)], ... et correspondant à

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = R + r.$$

4. Les asymptotes de l'hyperbole équilatère ABCI peuvent se trouver par différents procédés.

1° La droite OI rencontre le cercle ABC en deux points T, T'. Les inverses des points T, T' sont à l'infini ; comme ils sont aussi sur l'hyperbole, les asymptotes sont parallèles aux isogonales des droites AT, AT'.

On démontre facilement que l'isogonale de AT est perpendiculaire à la droite de Simson de T ; de même l'isogonale de AT' est perpendiculaire à la droite de Simson de T'. Comme ces deux droites de Simson sont des droites réciproques par rapport aux côtés de ABC (c'est-à-dire rencontrant chaque côté en deux points symétriques par rapport à son milieu), elles sont les asymptotes d'une hyperbole circonscrite à ABC ; cette courbe se confond nécessairement avec l'hyperbole équilatère ABCI.

2° Exprimons que le point P (ou Q) est à l'infini (ou sur la droite $ax + by + cz = 0$) ; nous aurons

$$\frac{\sin A}{R\cos A - \lambda} + \frac{\sin B}{R\cos B - \lambda} + \frac{\sin C}{R\cos C - \lambda} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\sin A}{\mu\cos A + r} + \frac{\sin B}{\mu\cos B + r} + \frac{\sin C}{\mu\cos C + r} = 0, \qquad (4')$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda R + \tfrac{1}{2} Rr = 0, \quad \mu^2 + 2\mu R + 2Rr = 0.$$

Par conséquent,

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr}), \quad \mu = -(R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr});$$

ou plus simplement, si T, T' sont les extrémités du diamètre OI de la circonférence ABC (on sait que $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$),

$$\lambda = \tfrac{1}{2} IT \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2} IT', \quad \mu = -IT' \quad \text{ou} \quad -IT.$$

Ainsi : *Quand on prend sur* A'O, B'O, C'O *les distances*

$$A'L_a = B'L_b = C'L_c = \tfrac{1}{2} IT, \quad A'L'_a = B'L'_b = C'L'_c = \tfrac{1}{2} IT',$$

les points L_a, L_b, L_c *et* L'_a, L'_b, L'_c *sont situés sur deux droites* l, l' *qui sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère* ABCI. *La circonférence décrite du centre* I *avec le rayon* IT' *coupe les droites* $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ *en des couples de points* U_a *et* U'_a, U_b *et* U'_b, U_c *et* U'_c, *et la circonférence décrite du centre* I *avec le rayon* IT *coupe les mêmes droites en des couples de points* W_a *et* W'_a, W_b *et* W'_b, W_c *et* W'_c : *si* U_a, U_b, U_c, W_a, W_b, W_c *sont les points situés par rapport à* I *du côté opposé à* α, β, γ, *les droites*

AU_a, BU_b, CU_c *sont parallèles à une asymptote de l'hyperbole, et les droites* AW_a, BW_b, CW_c *sont parallèles à l'autre.*

5. Les points O, I ayant pour coordonnées normales absolues

$$R\cos A,\quad R\cos B,\quad R\cos C, \text{ et } \quad r,\quad r,\quad r,$$

le point situé à l'infini sur la droite OI a des coordonnées proportionnelles à

$$R\cos A - r,\quad R\cos B - r,\quad R\cos C - r,$$

et l'inverse V de ce point a pour coordonnées

$$\frac{1}{R\cos A - r},\quad \frac{1}{R\cos B - r},\quad \frac{1}{R\cos C - r}, \tag{5}$$

ou

$$\frac{1}{\cos B + \cos C - 1},\quad \frac{1}{\cos C + \cos A - 1},\quad \frac{1}{\cos A + \cos B - 1}.$$

V est le point de rencontre de l'hyperbole ABCI avec le cercle ABC; car la droite de l'infini et le cercle ABC sont des lignes inverses.

En comparant les expressions (1) et (5), on voit que ce point V correspond à

$$\lambda = r,\quad \mu = -R.$$

On a donc le théorème suivant :

Si, sur les droites A'O, B'O, C'O, *on prend les longueurs*

$$A'V_a = B'V_b = C'V_c = r,$$

les perpendiculaires abaissées de A, B, C *sur les côtés correspondants du triangle* $V_aV_bV_c$ *concourent en un même point* V *du cercle* ABC; *ce point appartient aussi à l'hyperbole équilatère* ABCI.

La circonférence décrite sur OI comme diamètre passe par les points V_a, V_b, V_c; en comparant les angles du triangle $V_aV_bV_c$ à ceux du faisceau (O, A'B'C'), on voit que *le triangle* $V_aV_bV_c$ *est inversement semblable à* ABC.

Pour obtenir le point V, on peut aussi prendre sur les droites αI, βI, γI, à partir de I, trois longueurs égales à R et joindre leurs extrémités à A, B, C; les trois droites ainsi obtenues concourent en V.

6. Le milieu F de la droite HV est le centre de l'hyperbole ABCI. Car, H étant le centre de similitude interne du cercle des neuf points et du cercle ABC et le rapport de similitude étant 1 : 2, F est situé sur le

premier cercle et, par suite, est le centre d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C, V.

A, B, C, V étant les quatre points où un cercle coupe l'hyperbole ABCI, les axes de cette conique sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les deux côtés opposés du quadrangle ABCV.

D'après ce qu'on a déjà vu, F est l'intersection des droites de Simson des points T, T′ où la droite OI rencontre la circonférence ABC.

Soit V′ le symétrique de V par rapport à O. Dans le triangle HVV′, deux médianes sont HO, V′F ; on en conclut que V′F passe par le centre de gravité G de ABC et que V′G = 2GF ; donc F *est le complémentaire de* V′. De plus, l'équation de OV est

$$\Sigma (\cos B - \cos C)(1 - \cos A)(\cos B + \cos C - 1)\, x = 0;$$

on voit aisément qu'elle est vérifiée par les coordonnées $(1 - \cos A)^{-1}$,... du point de Nagel. Donc OV *passe par le point de Nagel.* Si O′ est le centre du cercle des neuf points de ABC, O′F est parallèle à OV et est la complémentaire de la droite OV, et par suite passe par I, le complémentaire de ν. On déduit de là que F est le point de contact du cercle des neuf points de ABC avec le cercle inscrit. A cause de cette propriété, nous proposons la dénomination *d'hyperbole de Feuerbach* pour la courbe que nous étudions ici.

Les asymptotes de la courbe sont les droites de Simson des extrémités T, T′ du diamètre OI du cercle ABC. Elles passent par le centre F et par les milieux T_1, T'_1 des droites HT, HT′. Soient t, t' les points où elles rencontrent OI ; $T_1T'_1$ passe par le milieu O′ de HO, et $O'F = O'T_1 = O'T'_1$; on en conclut $IF = It = It'$, donc t, t' sont les points où OI coupe le cercle inscrit à ABC.

Pour avoir les coordonnées du centre F, nous appliquons la règle bien connue : l'équation de la courbe étant

$$\Sigma (\cos B - \cos C)\, yz = 0,$$

nous écrivons que les dérivées partielles du premier membre sont proportionnelles à a, b, c.

En résolvant les équations ainsi obtenues, on trouve que les coordonnées normales de F sont

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(B - C), \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}(C - A), \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - B).$$

7. Soient P_1, P_2, P_3 les points où une même droite rencontre l'hyperbole de Feuerbach et la droite OI, et soient

$$\frac{1}{R\cos A-\lambda_1},\ \frac{1}{R\cos B-\lambda_1},\ \frac{1}{R\cos C-\lambda_1},\ \text{ou}\ \frac{1}{\mu_1\cos A+r},\dots$$

$$\frac{1}{R\cos A-\lambda_2},\ \frac{1}{R\cos B-\lambda_2},\ \frac{1}{R\cos C-\lambda_2},\ \text{ou}\ \frac{1}{\mu_2\cos A+r},\dots$$

$$R\cos A-\lambda_3,\quad R\cos B-\lambda_3,\quad R\cos C-\lambda_3,\quad \text{ou}\quad \mu_3\cos A+r,\dots$$

leurs coordonnées normales. En exprimant que le déterminant formé de ces coordonnées est nul, on trouve, après suppression du facteur $\lambda_1-\lambda_2$,

$$\Sigma(R\cos A-\lambda_1)(R\cos A-\lambda_2)(R\cos A-\lambda_3)(\cos B-\cos C)=0;$$

et en développant :

$$R^3\Sigma\cos^3 A(\cos B-\cos C)-R^2\Sigma\cos^2 A(\cos B-\cos C)\Sigma\lambda_1$$
$$+\Sigma R\cos A(\cos B-\cos C)\Sigma\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Sigma(\cos B-\cos C)=0.$$

Or

$$\Sigma\cos^3 A(\cos B-\cos C)=(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos A-\cos C)\Sigma\cos A,$$
$$\Sigma\cos^2 A(\cos B-\cos C)=(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos A-\cos C),$$
$$\Sigma\cos A(\cos B-\cos C)=0,\quad \Sigma(\cos B-\cos C)=0.$$

Donc la relation entre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se réduit à

$$\Sigma\lambda_1=R\Sigma\cos A=OA'+OB'+OC'=R+r; \qquad (6)$$

on la transforme aisément en celle-ci

$$\Sigma\frac{1}{\mu_1}=-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right),$$

car

$$\Sigma\cos A=1+\frac{r}{R}.$$

Cette relation remarquable est due à M. Boutin (*). Si l'on y suppose $\lambda_1=-\lambda_2$, λ_3 a une valeur constante; on en déduit le théorème suivant :

Un cercle de centre I *rencontre les droites* αI, βI, γI *aux couples de points* J_a *et* J'_a, J_b *et* J'_b, J_c *et* J'_c; *soient* J_a, J_b, J_c *les points situés par rapport à* I *du même côté que* α, β, γ. *Les droites* AJ_a, BJ_b, CJ_c *concou-*

(*) Pour les conséquences à tirer de l'équation (6), nous renvoyons le lecteur à l'article de M. M'Cay (*Mathesis*, t. VII, pp. 208-220).

rent en un même point J ; *les droites* AJ'_a, BJ'_b, CJ'_c, *en un même point* J'. *La droite* JJ' *passe par un point fixe* (*) *de la droite* OI.

Plus généralement, si la somme $\lambda_1 + \lambda_2$ a une valeur constante, la droite P_1P_2 passe par un point fixe de OI.

On peut encore généraliser davantage : *si l'on considère sur* $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ *des couples de points* Q_a *et* Q'_a, Q_b *et* Q'_b, Q_c *et* Q'_c *formant trois involutions égales* ($IQ_a = IQ_b = IQ_c$, $IQ'_a = IQ'_b = IQ'_c$), *les droites* AQ_a, BQ_b, CQ_c *et* AQ'_a, BQ'_b, CQ'_c *concourent respectivement en deux points* Q, Q' *de l'hyperbole de Feuerbach : la droite* QQ' *passe par un point fixe.* En effet, les droites AQ_a et AQ'_a étant des rayons conjugués d'une involution, les points Q, Q' marquent sur l'hyperbole une involution.

8. Si l'on transforme par inversion triangulaire les droites OI_a, OI_b, OI_c, on obtient trois autres hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC et ayant pour centres les points de contact du cercle des neuf points avec les cercles exinscrits I_a, I_b, I_c. Ces courbes jouissent de propriétés analogues à celles de l'hyperbole ABCI.

9. Prenons, comme précédemment, sur les médiatrices A'O, B'O, C'O, trois longueurs égales,

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

et soit P le point de concours des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du triangle $P_aP_bP_c$. L'aire du triangle $P_aP_bP_c$ a pour expression

$$\frac{1}{2}\Sigma(R\cos A - \lambda)(R\cos B - \lambda)\sin C = \frac{S}{2kr}\left(\frac{Rr}{2} - R\lambda + \lambda^2\right);$$

elle passe par un minimum (négatif) pour $\lambda = \frac{R}{2}$, $\mu = -2r$.

Deux triangles $P_aP_bP_c$ qui correspondent à deux valeurs de λ ayant pour somme R, sont équivalents. La droite qui joint les points correspondants de l'hyperbole de Feuerbach est constamment parallèle à OI (§ 7).

10. Nous avons désigné par V (§ 5) le point de rencontre de l'hyperbole de Feuerbach avec la circonférence ABC, par V' le symétrique de V par rapport à O. V étant l'inverse du point à l'infini sur OI, V' est l'inverse du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à OI ou sur

---

(*) C'est le point ψ, situé à l'intersection de OI avec la droite joignant le point de Gergonne et le point de Nagel (cas particuliers des points J, J').

la polaire de I par rapport au cercle ABC. Cette polaire a pour équation

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0,$$

ou

$$2p(x+y+z)-(ax+by+cz)=0;$$

on voit qu'elle est parallèle à la droite $x+y+z=0$, axe d'homologie des triangles ABC, $I_aI_bI_c$. Par suite, V' appartient à la transformée par inversion triangulaire de cet axe, ou à l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0. \tag{7}$$

Cette conique touche les côtés du triangle $I_aI_bI_c$ aux points A, B, C et a pour centre le point de Lemoine de $I_aI_bI_c$, point qui a pour coordonnées

$$p-a,\quad p-b,\quad p-c \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2},\quad \operatorname{cotg}\frac{B}{2},\quad \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

et appartient à l'hyperbole de Feuerbach.

Les axes de l'ellipse (7) sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux côtés opposés du quadrangle cyclique inscrit ABCV'; ces bissectrices formant l'angle de 45° avec celles des angles formés par les côtés opposés du quadrangle ABCV, inscrit à l'hyperbole de Feuerbach, on voit que les axes de l'ellipse (7) sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Les coordonnées de V' sont

$$\frac{1}{b-c},\quad \frac{1}{c-a},\quad \frac{1}{a-b}.$$

PROPRIÉTÉS DE DEUX TRIANGLES;

par M. J. Wastkels, professeur à l'Athenée de Hasselt.

Soient S la surface d'un triangle; a, b, c ses côtés; h_a, h_b, h_c les hauteurs abaissées sur ces côtés; A, B, C les angles opposés aux côtés a, b, c; r, le rayon du cercle inscrit; R, le rayon du cercle circonscrit.

Soient S' la surface d'un second triangle ayant pour côtés

$$a'=b+c,\quad b'=c+a,\quad c'=a+b;$$

ρ'_a, ρ'_b, ρ'_c les rayons des cercles exinscrits à ce triangle; A', B', C' les angles opposés respectivement aux côtés a', b', c'; r' le rayon du cercle inscrit.

On a :

1° $$r' = \sqrt{2Rr};$$

2° $$\frac{\rho'_a}{h_a} = \frac{\rho'_b}{h_b} = \frac{\rho'_c}{h_c} = \frac{r'}{r} = \frac{S'}{2S};$$

3° $$\frac{\sin A}{\cot \frac{1}{2} A'} = \frac{\sin B}{\cot \frac{1}{2} B'} = \frac{\sin C}{\cot \frac{1}{2} C'};$$

4° $$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A'+B')}{\sin \frac{1}{2}(B'-A')}.$$

Démonstration. Si l'on pose

$$2p' = a' + b' + c', \quad 2p = a + b + c,$$

on a

$$p' = 2p, \quad p' - a' = a, \quad p' - b' = b, \quad p' - c' = c.$$

De là, on déduit

$$r' = \sqrt{\frac{(p'-a')(p'-b')(p'-c')}{p'}} = \sqrt{\frac{abc}{2p}} = \sqrt{2Rr}.$$

Les égalités (2°) résultent des relations suivantes :

$$S' = \rho'_a(p'-a') = \rho'_b(p'-b') = \rho'_c(p'-c') = p'r' = 2pr',$$
$$2S = h_a \times a = h_b \times b = h_c \times c = 2pr.$$

Pour établir les égalités (3°), il suffit de remarquer que chaque rapport vaut $\frac{r'}{2R}$.

Pour arriver à (4°), on observe qu'on peut écrire

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\cot \frac{1}{2} A' + \cot \frac{1}{2} B'}{\cot \frac{1}{2} A' - \cot \frac{1}{2} B'} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A'+B')}{\sin \frac{1}{2}(B'-A')}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Récréations mathématiques, par M. Éd. Lucas. Tome III. Un vol. in-8° de VII-200 pages et 79 figures dans le texte. — Paris, Gauthier-Villars et fils. 1893. Prix : fr. 7-50.

Les *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas formaient jusqu'à présent deux volumes qui ont paru en 1882 et en 1883, et ont été annoncés immédiatement dans ce journal (t. II, 181-183, t III, 51-55, 202-203). Depuis, le premier volume était parvenu à une nouvelle édition, signalée aussi dans *Mathesis* (1891. (2), I, 45-46 .

Ces deux volumes ne représentaient d'ailleurs qu'une partie de l'œuvre de vulgarisation à laquelle Éd. Lucas a travaillé avec tant d'ardeur et d'ingéniosité, et où

il a su déployer ce talent pédagogique si apprécié, qui lui a permis de rendre attrayantes les démonstrations de propriétés arithmétiques, sujet qui comporte par lui-même une grande sécheresse.

La prédilection témoignée par Éd. Lucas pour ce que nous pourrions appeler les mathématiques récréatives, se trouve confirmée par ce fait que l'auteur avait depuis longtemps préparé les matériaux non seulement d'un troisième volume, mais également d'un quatrième, dont la publication ne tardera pas, sans doute, à suivre celle du volume qui vient de paraître.

Ce volume comprend sept *récréations* dont nous donnons ci-après le résumé.

Le Calcul sur les doigts. Ce chapitre est en partie rédigé d'après une conférence faite à Paris en 1885. Le lecteur pourra également en juger par un passage de la *Théorie des Nombres*, reproduit dans *Mathesis* (X, 243).

Le Calcul et les machines à calculer. Reproduction textuelle de la brillante conférence d'Éd. Lucas au Congrès de Blois en 1884.

Le jeu du caméléon et le jeu des jonctions de points. Le jeu du caméléon est une variante du taquin, étudié dans le II^me^ volume. Le jeu des jonctions de points n'est donné ici qu'à titre de marche à suivre.

Le jeu militaire et la Prise de la Bastille. Étude raisonnée d'une sorte de jeu de marelle, et exposition des règles qui assurent le gain de la partie.

La patte d'oie et le fer à cheval. Discussion du jeu de trois dames contre une, sur l'échiquier ordinaire de 64 cases.

Le jeu américain et les amusements par les jetons. Étude de différentes combinaisons qui se ramènent à des types très simples.

L'étoile nationale et les jeux de rouge et noire. Ce nouveau jeu, inventé récemment par M. Arnous de Rivière, se prête à des combinaisons suffisamment variées pour exciter l'attention des joueurs, en évitant l'inconvénient du jeu du taquin, où le hasard des données initiales aboutit, généralement une fois sur deux, à une impossibilité.

M. A. de Rivière est également l'inventeur des jeux de rouge et noire, exposés dans le même chapitre et dont la variété est aussi indéfinie que celle de la Roulette. La détermination des probabilités de gain correspondant à différentes combinaisons de ces jeux a fait l'objet d'une étude très approfondie de M. le colonel Ch. Moreau. Elle est résumée en 19 graphiques.

Ici se termine l'exposé des matières du volume, dont l'intérêt, comme on le voit, ne le cède en rien à celui des précédents.

La mort prématurée d'Éd. Lucas avait fait craindre une interruption dans la publication de son œuvre scientifique, mais le zèle éclairé de ses collègues de la Société mathématique, MM. Delannoy, Laisant et Lemoine, a pourvu à l'accomplissement de cette tâche, leur créant ainsi de nouveaux titres à la reconnaissance du public mathématique.

Enfin, MM. Gauthier-Villars et fils, éditeurs, ont assuré à l'exécution typographique de cet ouvrage l'élégance et la perfection que l'on connaît. (H. BROCARD.)

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par Schoute (Groningue), Korteweg (Amsterdam), Kluyver (Leyde), Kapteyn (Utrecht) et Zeeman (Delft) avec la collaboration de MM. Van Aller, De Boer, Cardinaal, Coelingh, Escher, Mantel, P. Molenbroek, Van Mourik, Paraira, Rahusen, Schouten, Tesch, Versluys, De Vries et M^lle^ Wijthoff. Tome I, Première partie, Amsterdam, Versluys, 1893. (In-8°, 104 pages) (*).

La Revue semestrielle constituera un répertoire très utile à tous ceux qui désirent rester au courant des progrès des mathématiques. Elle donnera des comptes rendus très sommaires des mémoires publiés dans les principaux journaux scientifiques; les titres des travaux analysés seront accompagnés d'une ou de plusieurs notations, renvoyant au système de classification adopté par le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques. Elle paraîtra en général le premier janvier et le premier juillet, la première livraison s'occupant des travaux parus du premier mars au premier octobre de l'année précédente; la seconde de ceux des six mois suivants; de cette façon, il n'y a jamais un long retard entre la publication d'un mémoire et son analyse. Chaque livraison sera terminée par une table des matières très méthodique et une table des auteurs, ce qui facilitera beaucoup les recherches. Le rédaction du journal se fait en français; toutefois, pour les mémoires écrits en anglais ou en allemand, les comptes rendus se serviront de la langue de l'auteur.

Les mathématiciens hollandais sont probablement les seuls qui puissent ainsi entreprendre la publication d'un recueil scientifique en trois langues dont aucune n'est la langue maternelle des rédacteurs.

Dans le premier numéro, plus de cent vingt Recueils ont été examinés; ce nombre augmentera sans doute dans la suite.

Le plan de la Revue semestrielle est parfaitement conçu, et la compétence des rédacteurs et des collaborateurs est bien connue. Dans ces conditions, le succès est assuré. (P. M. et J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

7. *Sur l'hyperbole équilatère.* — Soient Ox, Oy les axes d'une hyperbole équilatère, A et A′ les extrémités de l'axe transverse. L'équation $x^2 - y^2 = a^2$, ou $x^2 = y^2 + a^2$, suggère la construction suivante :

On joint un point quelconque Q *de* Oy *au sommet* A, *et l'on prend, sur*

(*) Prix de l'abonnement annuel (payable d'avance) 4 florins ou 8 fr. 50. On s'abonne par l'envoi d'un mandat postal à l'adresse de M. Schouten, Amsterdam, Prinsengracht, 264.

une parallèle à Ox *par* Q, *les longueurs* QM = QM′ = QA ; *les points* M, M′ *appartiennent à l'hyperbole.*

Il en résulte ce théorème :

La circonférence qui passe par les sommets A, A′ *et par un point quelconque* M *d'une hyperbole équilatère a son centre sur la parallèle à* AA′ *par* M, *et, par suite, sa tangente en* M *est perpendiculaire à* AA′.

Supposons maintenant que l'on construise, dans un plan perpendiculaire à Oy, une circonférence Δ ayant pour diamètre AA′, et considérons le cône qui a pour base Δ, pour sommet un point quelconque M de l'hyperbole. Le plan d'une section antiparallèle du cône est perpendiculaire au plan MAA′ et sa trace sur ce dernier plan doit former un quadrilatère inscriptible avec MA, MA′, AA′; cette trace, d'après le théorème énoncé ci-dessus, est perpendiculaire à AA′. De là, on déduit cette élégante proposition de Steiner (*Œuvres complètes*, t. I, p. 11) :

Étant donnée une circonférence Δ, *le lieu des points de vue tels que la perspective de* Δ *sur un plan perpendiculaire à celui de* Δ *soit également une circonférence, est l'hyperboloïde de révolution dont* Δ *est la circonférence de gorge.* (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 765.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 104).

Au point P *d'une courbe* Δ *on mène l'ordonnée* PB *et la tangente* PA *rencontrant l'axe* OX *en* A, *la perpendiculaire élevée en* A *sur* PA *coupe* PB *en* M. *Déterminer la courbe* Δ *par la condition que la courbe* (M) *soit symétrique de* Δ *par rapport à l'origine.* (H. Brocard.)

Solution par M. Joachimescu. Soit : $y = f(x)$ l'équation de la courbe Δ. L'équation de la tangente en P étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

celle de la perpendiculaire en A sur PA sera

$$Y = -\left(\frac{dx}{dy}\right)\left[X - x + y\frac{dx}{dy}\right].$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

Les coordonnées du point M seront donc :

$$X = x, \quad Y = -y\left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

L'équation de la courbe (M) sera :

$$Y = -\frac{f(X)}{f'^2(X)}.$$

La symétrique de la courbe donnée par rapport à l'origine a pour équation

$$Y = -f(-X);$$

on doit donc avoir, pour toutes les valeurs de X,

$$f(-X) = \frac{f(X)}{f'^2(X)}; \tag{1}$$

changeant X en $-X$ et multipliant les deux égalités membre à membre, on obtient

$$f'^2(X) f'^2(-X) = 1.$$

L'équation $\varphi(x)\,\varphi(-x) = 1$ étant vérifiée par $\varphi(x) = a^x$, nous prenons

$$f'^2(x) = a^x, \quad f'(x) = \pm (\sqrt{a})^x = \pm b^x, \quad f(x) = \pm \frac{b^x}{\log b} + c,$$

b étant une constante arbitraire et c une quantité qu'on détermine au moyen de l'identité (1). On trouve $c = 0$; donc la courbe ayant pour équation $y = \pm \frac{b^x}{\log b}$ satisfait au problème proposé.

Solution par M. Ghuys. De la relation (1), où l'on écrit x au lieu de X, savoir :

$$f(-x) = \frac{f(x)}{f'^2(x)}, \tag{2}$$

on déduit

$$-f'(-x) = \frac{f'^3(x) - 2f(x)f'(x)f''(x)}{f'^4(x)},$$

et, à cause de $f'(x).f'(-x) = \pm 1$, en éliminant $f'(-x)$,

$$\frac{\pm 1}{f'x} = \frac{f'^3(x) - 2f(x)f'(x)f''(x)}{f'^4(x)}.$$

On tire de là, en remplaçant $f(x)$ par y, l'équation différentielle

$$\pm \frac{1}{y'} = \frac{y'^3 - 2yy'y''}{y'^4},$$

ou $yy'' = 0$, $y'^2 = yy''$. La première équation ne conduit à rien, l'autre donne

$$\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y''}, \quad y' = my, \quad y = Ce^{mx},$$

et en substituant dans l'équation (2), on trouve $C = \pm \frac{1}{m}$.

M. R. H. Van Dorsten a aussi résolu la question par un procédé au fond identique au précédent. Il pose $u^2 = f(x) : f(-x)$ et détermine la valeur de u.

Question 779.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 215.)

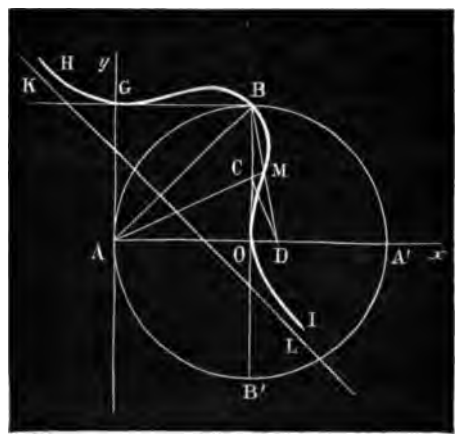
Soient AA', BB' *deux diamètres rectangulaires d'un cercle* O. *Une sécante quelconque menée par* A *coupe* BB' *en* C, *la perpendiculaire élevée en* C *sur* AC *rencontre* AA' *en* D. *Trouver le lieu géométrique du point* M, *intersection de* AC *avec* BD.

En déduire la construction d'un angle dont la tangente soit le carré de la tangente d'un angle donné. (H. Brocard.)

Solution par M. Fraipont (Liége). Prenons pour axes de coordonnées le diamètre AA' et la tangente Ay. Si a désigne le rayon OA et si ω, φ sont les angles OAC, OBD, on a

$$OD = OC \operatorname{tg} \omega = AC \operatorname{tg}^2 \omega,$$
$$OD = OB \operatorname{tg} \varphi;$$

par conséquent $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}^2 \omega$. Il est donc facile de construire un angle dont la tangente est égale au carré de la tangente d'un angle donné.



La droite BD passe par le point B (a, a) et a pour coefficient angulaire $-\operatorname{cotg}^2 \omega$; elle a donc pour équation

$$y - a = -\operatorname{cotg}^2 \omega \, (x - a).$$

Si l'on élimine ω entre cette équation et celle de la droite AC, on trouve pour le lieu de M

$$x^3 + y^3 = a(x^2 + y^2). \tag{1}$$

En coordonnées polaires, on a

$$\rho = \frac{a}{\cos^3\omega + \sin^3\omega}. \tag{2}$$

L'origine A est un point isolé; les tangentes en ce point sont les droites isotropes. La droite AB est un axe de symétrie, car l'équation (1) n'est pas altérée par le changement de x en y et de y en x. Une asymptote a pour équation $y = \frac{2}{3}a - x$. Un point d'ordonnée maximum correspond à $x = \frac{2}{3}a$; un point d'ordonnée minimum, à $x = 0$, $y = a$.

Si l'équation d'une courbe est $\rho = [1 : \varphi(\omega)]$, un point d'inflexion satisfait à l'égalité $\varphi(\omega) + \varphi''(\omega) = 0$; en prenant $a\varphi(\omega) = (\cos^3\omega + \sin^3\omega)$, on trouve

$$(\cos\omega + \sin\omega)\ (1 - 2\sin 2\omega) = 0.$$

La solution $\cos\omega + \sin\omega = 0$ donne le point à l'infini sur l'asymptote; la solution proprement dite est $\sin 2\omega = \frac{1}{2}$, d'où $\omega = 15°$ ou $75°$.

Ont résolu la même question Mad. Prime, MM. Morel (Creusot), Denys, Droz, Decamps, Déprez et Mandart.

M. Droz démontre géométriquement que le lieu de M est du troisième ordre : Toute droite BD menée par B contient trois points du lieu, à savoir le point B qui correspond à $\omega = 45°$, et deux points M, M' que l'on obtient en joignant le point A aux points C, C' où la circonférence décrite sur AD comme diamètre coupe BB'. L'existence de l'asymptote se reconnaît immédiatement : si la sécante AC coïncide avec AB', BD se confond avec BA'.

× Question 794.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 264).

Si $A + B + C + D = 2n\pi$, *démontrer la relation*

$$\Sigma\cos^4 A - 2\Sigma\cos^2 A\cos^2 B + 4\Sigma\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C = 4\cos A\cos B\cos C\cos D\,(\Sigma\cos^2 A - 2).$$ (Greenstreet.)

Solution par M. Van Dorsten. Comme $A, B, C + D$ sont trois angles dont la somme est égale à $2n\pi$, on a, d'après un théorème connu,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2(C + D) = 1 + 2\cos A\cos B\cos(C + D).$$

Cette relation donne, si l'on développe $\cos(C+D)$,

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\cos^2 D+(1-\cos^2 C)(1-\cos^2 D)-1$$
$$-2\cos A\cos B\cos C\cos D=2\sin C\sin D(\cos C\cos D-\cos A\cos B).$$

Élevons les deux membres de cette égalité au carré et remplaçons

$$\sin^2 C,\quad \sin^2 D \quad \text{par} \quad 1-\cos^2 C,\quad 1-\cos^2 D,\ \text{etc.}$$

Solution par M. Catania. On a

$$\cos(A+B)=\cos(C+D),$$

d'où

$$\cos A\cos B-\cos C\cos D=\sin A\sin B-\sin C\sin D$$
$$=\sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)}-\sqrt{(1-\cos^2 C)(1-\cos^2 D)}.$$

Élevons les deux membres de cette égalité au carré; nous aurons

$$\Sigma\cos^2 A-2=2\sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)(1-\cos^2 D)}.$$

Ensuite

$$(\Sigma\cos^2 A-2)^2=$$
$$4(1-\Sigma\cos^2 A+\Sigma\cos^2 A\cos^2 B-\Sigma\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C$$
$$+\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D),\ \text{etc.}$$

× Question 796.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 264.)

Résoudre le système

$$xy(x+y)=ab(a+b),$$
$$yz(y+z)=bc(b+c),$$
$$zx(z+x)=ca(c+a).\qquad\text{(Laisant.)}$$

Solution par M. Mandart. Une solution évidente est $x=a$, $y=b$, $z=c$. Pour en trouver d'autres, posons

$$x+y+z=u,\quad xyz=v;$$

Le système prendra la forme

$$\frac{v(u-z)}{z}=ab(a+b),\quad \frac{v(u-x)}{x}=bc(b+c),\ \cdots;$$

on en déduit

$$z=\frac{vu}{ab(a+b)+v},\quad x=\frac{vu}{bc(b+c)+v},\quad y=\frac{vu}{ca(c+a)+v}.\qquad(1)$$

Si l'on fait la somme de ces valeurs, on obtient l'équation

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{ab(a+b)+v} + \frac{1}{bc(b+c)+v} + \frac{1}{ca(c+a)+v}, \qquad (2)$$

qui sert à déterminer v. Rendue entière, elle devient

$$2v^3 + v^2 \Sigma ab\,(a+b) - a^3b^3c^3\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 0.$$

On sait qu'elle admet la racine $v = abc$; on peut le vérifier en observant que

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = \Sigma ab\,(a+b) + 2abc.$$

Les deux autres valeurs de v sont racines de l'équation

$$2v^2 + v\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) + abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 0.$$

Si l'on multiplie les égalités (1) membre à membre, on trouve

$$u^3 = \frac{[ab(a+b)+v]\,[bc(b+c)+v]\,[ca(c+a)+v]}{v^2}.$$

Le numérateur de la dernière fraction, eu égard à l'égalité (2), est égal à

$$\Sigma v\,[bc(b+c)+v]\,[ca(c+a)+v],$$

de sorte qu'on peut écrire

$$u^3 = \frac{v^2 + 2v\Sigma ab\,(a+b) + abc\Sigma a\,(a+b)\,(a+c)}{v}.$$

Ont résolu la même question MM. Brocard, Delville, Decamps.

Question CCCCXIV.

(N. C. M., t. IV, p. 303; Laisant IV, n° 153, p. 41.)

Trouver la relation qui existe entre la longueur d'une corde de l'ellipse, les rayons vecteurs(*) *des deux extrémités et les distances des deux foyers à cette corde. — En déduire que le produit des distances des deux foyers à une tangente à l'ellipse est constant.* (Éd. Lucas.)

Solution par M. Barisien. Soit M_1M_2 la corde de l'ellipse de longueur

(*) M. Barisien prend les demi-diamètres OM_1, OM_2; la relation qu'on demande est alors *déterminée*. La longueur de la corde M_1M_2 et les rayons vecteurs M_1F, M_1F', M_2F, M_2F' déterminent complètement le quadrilatère M_1M_2FF' et, par suite, chacune des distances de M_1M_2 à F ou à F'. (J. N.)

l. Désignons par r_1, r_2 les rayons vecteurs joignant le centre O aux points M_1, M_2, et par δ, δ_1 les distances des foyers F, F' à la corde M_1M_2.

L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, si $y = mx + p$ est l'équation de la corde M_1M_2, et si (x_1, y_1) (x_2, y_2) sont les coordonnées des deux points M_1, M_2, on a

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 (1 + m^2).$$

Or, l'équation qui donne les abscisses de M_1 et M_2 est

$$x^2 (a^2m + b^2) + 2a^2mpx + a^2 (p^2 - b^2) = 0.$$

Par conséquent,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mp}{a^2m^2 + b^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2(p^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4a^2b^2 (a^2m^2 + b^2 - p^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Donc

$$l^2 = \frac{4a^2b^2 (1 + m^2) (a^2m^2 + b^2 - p^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}. \qquad (1)$$

D'autre part,

$$\delta = \frac{p + mc}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \delta_1 = \frac{p - mc}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\delta\delta_1 (1 + m^2) = p^2 - m^2c^2.$$

Cette relation peut s'écrire

$$a^2m^2 + b^2 - p^2 = (b^2 - \delta\delta_1) (1 + m^2). \qquad (2)$$

L'égalité (1) devient, en tenant compte de (2),

$$l = 2ab \left(\frac{1 + m^2}{a^2m^2 + b^2}\right) \sqrt{b^2 - \delta\delta_1}. \qquad (3)$$

Exprimons maintenant de deux façons différentes l'aire du triangle OM_1M_2.

Soient P la projection de O sur M_1M_2 et α l'angle M_1OM_2. On a

$$OP \times M_1M_2 = r_1r_2 \sin \alpha.$$

Mais

$$OP = \frac{p}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Donc

$$\frac{p^2l^2}{1+m^2} = r_1^2 r_2^2 \sin^2\alpha. \tag{4}$$

Or,

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha. \tag{5}$$

En éliminant α entre (4) et (5), on trouve

$$\frac{4p^2l^2}{1+m^2} = 4r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2. \tag{6}$$

Pour avoir la relation entre l, r_1, r_2, δ et δ_1, remarquons que l'égalité (2) peut prendre la forme

$$\frac{a^2m^2+b^2}{1+m^2} - \frac{p^2}{1+m^2} = b^2 - \delta\delta_1. \tag{7}$$

Or les équations (3) et (6) donnent les valeurs de $\frac{a^2m^2+b^2}{1+m^2}$ et $\frac{p^2}{1+m^2}$, qui, portées dans (7), fournissent immédiatement la relation demandée :

$$8abl\sqrt{b^2-\delta\delta_1} + (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 = 4l^2(b^2 - \delta\delta_1). \tag{8}$$

Lorsque $l = 0$, c'est-à-dire lorsque la corde est tangente, on a aussi $r_1 = r_2$, et l'équation (8) est identiquement satisfaite.

La relation (3) montre que, dans ce cas, $\delta\delta_1 = b^2$. On retrouve ainsi une propriété connue.

Question DXXXVIII.

(N. C. M., VI, p. 142, 228 et 263; Laisant, IV, n° 282).

Démontrer que la surface de révolution, représentée par les équations

$$x = \cos u \cos 2v,$$
$$y = \cos u \sin 2v,$$
$$z = \sin u(\cos v - \cos u \sin v),$$

n'a qu'une seule face; c'est-à-dire qu'en cheminant sur cette surface, d'une manière continue, on peut, d'un point quelconque, aller à un autre point quelconque. (R. Hoppe).

Solution par M. E. Genty. Si ξ, η et ζ sont les orienteurs des axes, ρ le vecteur d'un point de la surface, on aura

$$\rho = \cos u \cos 2v.\xi + \cos u \sin 2v.\eta + \sin u (\cos v - \cos u \sin v)\zeta,$$

et par suite

$$d\rho = \alpha du + \beta dv,$$

en posant

$$\alpha = -\sin u \cos 2v.\xi - \sin u \sin 2v.\eta + [\cos u (\cos v - \cos u \sin v) + \sin u \sin v]\zeta.$$

$$\beta = -2 \cos u \sin 2v.\zeta + 2 \cos u \cos 2v.\eta - \sin u (\sin v + \cos u \cos v)\zeta.$$

Si partant d'un point (u, v) nous faisons croître u et v d'une manière continue jusqu'à ce que u prenne la valeur $2\pi - u$ et v la valeur $\pi + v$, nous reviendrons au point de départ après avoir cheminé d'une manière continue sur la surface. Or, pour ces nouvelles valeurs des paramètres, α et β conservent les mêmes modules, mais α change de signe; donc la normale change elle-même de direction, ce qui démontre la proposition.

Note. M. Cremona a fait remarquer (N. C. M., VI, 263) que la surface est engendrée par la révolution autour d'un axe, d'une courbe *variable* de forme; ce n'est donc pas une surface *de révolution* dans le sens ordinaire du mot.

QUESTIONS D'EXAMEN.

551. On donne deux circonférences O, O′ et un point P; mener aux deux circonférences deux tangentes parallèles telles que le rapport des distances du point P aux deux tangentes soit égal à un rapport donné $(m : n)$.

Seconde solution (voir p. 78). Le J. M. E., dans son n° de mars, p. 67, indique une autre solution, très simple, de ce problème dont l'énoncé est emprunté au petit ouvrage si suggestif de M. Petersen (*Méthodes et théories*, etc., question 139).

Soient t, t' les deux tangentes cherchées. Transformons la circonférence O′ et la tangente t' par homothètie, en prenant pour centre le point donné P, pour rapport de similitude $\frac{m}{n}$; la droite t' a pour transformée t, la circonférence O′ une circonférence O″ facile à construire. Le problème revient maintenant à mener une tangente commune aux cercles O, O″.

Telle est la solution indiquée par Petersen et retrouvée par M. Ancellin, élève à l'école supérieure d'Amiens.

552. On divise la base AB d'un triangle isoscèle CAB en trois parties égales aux points D, E. Si α, x désignent les angles ACB, DCE, on a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad \cos x=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}.$$ (BELLACHI.)

553. Soient AEFB, AHIC les carrés construits sur les côtés AB, AC de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC; O le point d'intersection des droites BI, CF; AOD la perpendiculaire abaissée de H sur BC. Démontrer les relations

$$\frac{1}{AO}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC},\quad AB.FC.IO=AC.FO.IB,\quad \frac{IO}{OB}=\frac{(AB+AC)AC}{\overline{AB}^2},$$

$$\frac{FO}{OC}=\frac{(AB+AC)AB}{\overline{AC}^2}.$$ (H. VAN AUBEL.)

554. Résoudre le système

$$(m-2)x-(m+1)y=3,\quad \frac{x-y}{3}=\frac{(m+2)(m-1)}{(m-2)(m+1)}.$$

Déterminer les limites entre lesquelles m doit être compris pour que x et y soient tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif. *(Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles, 1892.)*

555. Dans un triangle sphérique ABC, l'arc de grand cercle MN qui passe par les milieux M et N des côtés AB et AC détermine sur le troisième côté BC deux points D et E également distants des extrémités B et C de ce côté, de sorte que BD = CE.

556. Pour quelles valeurs entières de n, l'expression

$$\frac{(n+5)(n+6)}{6n}$$

se réduit-elle à un nombre entier? (BELLACHI.)

L'expression se ramène à

$$\frac{1}{6}\left(n+11+\frac{30}{n}\right);$$

n doit diviser 30, et $n+\frac{30}{n}$ doit être un multiple de 6 plus 1. Donc $n=1, 30, 3, 10$.

557. Trouver les côtés d'un triangle isoscèle, connaissant sa surface et la surface totale du cône qu'engendre le périmètre du triangle en tournant autour de la hauteur. Discussion.

(*Baccalauréat*, Montpellier, 1892.)

558. Un cône et un cylindre de même hauteur donnée h ont même volume et même surface totale. Trouver les rayons.

(*Baccalauréat*, Nancy, 1892.)

559. Dans quel système de numération le nombre $(3457)_{10}$ est-il représenté par 4761?

560. Calculer à un millième près le côté du polygone régulier de 24 côtés inscrit dans une circonférence de rayon égal à l'unité.

(*Baccalauréat*, Poitiers, 1892.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

***828.** Dans une pile de boulets rectangulaire, quel est le nombre des points de contact de deux boulets? (E. LEMOINE.)

829. En chaque point M d'une ellipse donnée, on construit le centre de courbure μ de l'hyperbole homofocale qui passe en M. Trouver le lieu géométriqne dn point μ. (J. NEUBERG.)

830. On donne un angle xOy et un point H. Deux droites rectangulaires quelconques, menées par H, coupent Ox en P, P′ et Oy en Q, Q′. On demande de trouver :

1° l'enveloppe de la droite joignant les milieux P″, Q″ des segments PP′, QQ′;

2° le lieu du second point d'intersection des circonférences PHP′, QHQ′;

3° l'enveloppe de la droite joignant les milieux R, R′ des droites PQ, P′Q″;

4° le lieu du milieu de la droite RR′. (J. NEUBERG.)

831. Si a, b sont des nombres entiers, et si x, y vérifient la condition $x+y=m$, la quantité

$$m^{b-1}\frac{x^a}{a}-C_{b-1,1}m^{b-2}\frac{x^{a+1}}{a+1}+C_{b-1,2}m^{b-3}\frac{x^{a+2}}{a+2}-\cdots\pm\frac{x^{a+b-1}}{a+b-1}$$
$$+m^{a-1}\frac{y^b}{b}-C_{a-1,1}m^{a-2}\frac{y^{b+1}}{b+1}+\cdots\pm\frac{y^{a+b-1}}{a+b-1}$$

est indépendante de x et de y.

Quand $m=1$, la proposition est presque évidente. (E. CATALAN.)

*883. Des équations

$$\sqrt{l \sin A} + \sqrt{m \sin B} + \sqrt{n \sin C} = 0,$$

$$-\frac{\cos^2 \frac{1}{2} A}{l} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{m} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{n} = 0,$$

déduire

$$l \cos^2 \tfrac{1}{2} A = m \sin^2 \tfrac{1}{2} B + n \sin^2 \tfrac{1}{2} C. \qquad \text{(A. C.)}$$

883. On considère les extrémités A et B de deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une ellipse de centre O. Sur la normale en A, on porte deux longueurs AM = AM′ = OB. On projette le point A sur OM en P, et sur OM′ en P′. On projette de même le point B sur OM en Q et sur OM′ en Q′. Chacun des lieux de P, P′, Q, Q′ est une courbe du sixième ordre. Montrer que la somme des aires de ces quatre courbes est double de l'aire de la podaire du centre de l'ellipse. (E. N. Barisien.)

884. En un point M quelconque d'une ellipse donnée, on mène la tangente qui rencontre les axes en T et T′, ainsi que la normale qui rencontre les axes en N et N′. Montrer que : 1° les cercles décrits sur TT′ et NN′ comme diamètres sont orthogonaux ; 2° le point de rencontre de ces cercles, autre que le centre de l'ellipse, a pour lieu géométrique la podaire du centre d'une ellipse ; 3° le cercle de diamètre NN′ enveloppe la podaire du centre d'une ellipse ; 4° la ligne des centres des deux cercles enveloppe une ellipse. (E. N. Barisien.)

*885. Éliminer xyz entre les équations

$$yz(1-2x) = \alpha^2(1-x), \quad zx(1-2y) = \beta^2(1-y),$$

$$xy(1-2z) = \gamma^2(1-z), \quad x+y+z = 1. \qquad \text{(D. Besso.)}$$

886. On donne un point P dans le plan du triangle ABC. Si l'on fait tourner les droites AP, BP, CP autour de A, B, C d'un même angle φ et dans un même sens, elles forment un triangle A′B′C′, dont les sommets décrivent des circonférences lorsque φ varie, qui reste toujours semblable à lui-même et dans lequel P est toujours son propre homologue. Comment faut-il choisir le point P pour qu'il soit l'orthocentre de A′B′C′, le point de Lemoine, un des points de Brocard, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, etc. ? Calculer les côtés de A′B′C′ en fonction des éléments du quadrangle ABCP et de l'angle φ. (Déprez.)

SUR L'ÉQUATION $(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2$;

par E. CATALAN (*).

I. Si, dans la célèbre identité d'Euler (**), on suppose $d=0$, $d'=0$, elle se réduit à

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2+(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2;$$

ou, par un changement de notation, à

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=\mathrm{P}=(xx'+yy'+zz')^2+(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2.$$

II. 1° Soient

$$\frac{x}{x'}\gtrless\frac{y}{y'},\quad \frac{y}{y'}\gtrless\frac{z}{z'},\quad \frac{z}{z'}\gtrless\frac{x}{x'}:$$

P *est une somme de quatre carrés.*

2° Soient

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}\gtrless\frac{z}{z'}:$$

P *est une somme de trois carrés.*

3° Soient

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}:$$

P *est carré.*

Par conséquent :

Si deux des rapports

$$\frac{x}{x'},\quad \frac{y}{y'},\quad \frac{z}{z'},$$

sont égaux entre eux, et différents du troisième, le produit P *est, certai-*

(*) A l'occasion de la question suivante proposée par M. De Rocquigny (*Mathesis*, 1892, p. (136) : *Si dans l'identité*

$$(a^2+\lambda b^2)(a'^2+\lambda b'^2)=(aa'+\lambda bb')^2+\lambda(ab'-ba')^2,$$

on remplace λ *par* c^2+d^2, *on a une solution de l'équation*

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2.$$

(**) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 519.

nement, la somme de trois carrés; et l'on a une solution de la question proposée (*).

Néanmoins, on ne peut affirmer que ces conditions, *suffisantes*, soient *nécessaires*. Car, dans certains cas, la somme de trois carrés peut être : un carré ; une somme de deux carrés ; une somme de quatre carrés.

Exemples :

$$4+4+1=9,\quad 169+16+9=169+25,\quad 25+4+1=16+9+4+1;$$

$$a^2(ab+c^2)^2+b^2(ab+c^2)^2+c^2(ab-a^2-b^2)^2=$$
$$9a^2b^2c^2+(b^2-c^2)^2a^2+(c^2-a^2)^2b^2+(a^2-b^2)^2c^2;\ \text{etc.}$$

Remarque : La méthode précédente ne donne pas toutes les solutions de l'équation proposée. Ainsi, l'on n'en peut déduire l'identité

$$(9+4+1)(1+1+1)=25+16+1.$$

Liége, 2 avril 1893.

SUR LES DEUX PARABOLES CIRCONSCRITES A UN QUADRANGLE DONNÉ ;

par M. Kluyver, professeur à l'Université de Leyde.

Par les sommets A, B, C, D d'un quadrangle complet, on peut faire passer deux paraboles P_1 et P_2, réelles ou imaginaires. Nous allons voir comment les paramètres p_1 et p_2 de ces courbes et l'angle φ de leurs axes dépendent du quadrangle donné.

I. Représentons les deux courbes par

$$y^2=2p_1x,\quad ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0,\quad (ab-h^2=0).$$

Appelons $(x_1, y_1),\ldots (x_4, y_4)$ les coordonnées des sommets A, B, C, D, et posons

$$\Sigma y_1=s_1,\quad \Sigma y_1y_2=s_2,\quad \Sigma y_1y_2y_3=s_3.\quad y_1y_2y_3y_4=s_4.$$

La parabole P_2 étant circonscrite au quadrangle, il faut qu'on ait

$$as_1=4hp_1,\quad as_2=4p_1^2b+4p_1g,\quad as_3=-8p_1^2f,\quad as_4=4p_1^2c;$$

on peut donc mettre l'équation de P_2 sous la forme

$$(4p_1x-s_1y)^2+4s_4-4s_3y+2p_1(4s_2-s_1^2)x=0\ldots \qquad (1)$$

(*) On peut consulter, relativement à ce sujet : *Sur quelques décompositions en carrés* (Rome, 1887), *Congrès de Rouen* (1883, p. 98) ; etc.

Un calcul connu donne l'équation de l'axe de P_2 ; on trouve

$$(s_1^2 + 16p_1^2)(4p_1x - s_1y) + (-4p_1^2s_1^2 + 2s_1s_2 + 16p_1^2s_2) = 0.$$

De là on conclut

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p_1}{\frac{1}{4}s_1}, \qquad (2)$$

où φ est l'angle que l'axe de P_1 doit décrire dans le sens positif, pour que sa direction coïncide avec celle de l'axe de P_2.

Remarquons que $\frac{1}{4}s_1$ représente en grandeur absolue la distance h_1 du centre de gravité G (intersection des droites joignant les milieux des côtés opposés) à l'axe de P_1 ; donc

$$\pm \operatorname{tg}\varphi = \frac{p_2}{h_2} = \frac{p_1}{h_1}.$$

Par suite : « Les distances du point G aux axes des paraboles sont proportionnelles aux paramètres ».

Si l'on a $\varphi = 90^0$, il faut que h_1 et h_2 soient nuls ; le quadrangle est alors inscriptible, les axes de P_1 et P_2 se coupent en G (théorème connu).

II. Posons maintenant

$$BCD = I_1, \quad CAD = I_2, \quad ABD = I_3, \quad CBA = I_4,$$

ce qui entraîne

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Nous aurons

$$2I_1 = y_2(x_3 - x_4) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_2 - x_3) =$$
$$-\frac{1}{2p_1}(y_3 - y_4)(y_2 - y_4)(y_2 - y_3),$$

et en vertu des expressions analogues pour I_2, I_3, I_4,

$$I_1I_2I_3I_4 = \frac{1}{256p_1^4}\{(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)(y_1-y_4)(y_2-y_4)(y_3-y_4)\}^2 =$$
$$\frac{1}{256p_1^4}K^2.$$

Dans la relation identique

$$-4\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & x_1^2+y_1^2 \\ 1, & x_2, & y_2, & x_2^2+y_2^2 \\ 1, & x_3, & y_3, & x_3^2+y_3^2 \\ 1, & x_4, & y_4, & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0, & (12)^2, & (13)^2, & (14)^2 \\ (21)^2, & 0, & (23)^2, & (24)^2 \\ (31)^2, & (32)^2, & 0, & (34)^2 \\ (41)^2, & (42)^2, & (43)^2, & 0 \end{vmatrix} = \Delta,$$

où les distances AB, etc., sont désignées par (12), etc., nous substituons $x_1 = \frac{y_1^2}{2p_1}$, etc. Cela donne, après quelques réductions,

$$\Delta = -\frac{s_1^2 K^2}{16 p_1^6};$$

la relation (2) peut donc être transformée en celle-ci :

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{16 p_1^2}{s_1^2} = -\frac{256 I_1 I_2 I_3 I_4}{\Delta}, \tag{3}$$

première relation, par laquelle l'angle φ est exprimé par les seules données du quadrangle.

III. Il est naturel d'exprimer φ par les angles de la figure. Supposons que A, B, C, D soient les sommets consécutifs d'un quadrangle convexe ordinaire ABCD avec les côtés AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$ et les diagonales BD $= f$, AC $= g$. Nous aurons alors

$$-\Delta = 4a^2c^2b^2d^2 - (a^2c^2 + b^2d^2 - f^2g^2)^2 =$$
$$-4a^2b^2c^2d^2 \sin(A + C) \sin(B + D) \text{ (*)},$$

$I_1 = \frac{1}{2} bc \sin C$, $I_2 = -\frac{1}{2} dc \sin D$, $I_3 = \frac{1}{2} ad \sin A$, $I_4 = -\frac{1}{2} ab \sin B$, et par là

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{4 \sin A \sin B \sin C \sin D}{\sin(A + C) \sin(B + D)}, \tag{4}$$

équation symétrique, d'où nous concluons que l'angle φ dépend seulement des angles A, B, C, D. On devait s'y attendre, puisque la construction graphique des directions des axes n'exige que la connaissance des directions de deux couples de côtés opposés.

IV. On peut remplacer l'équation (4) par d'autres assez remarquables. Nous allons en signaler encore deux des plus simples. Considérons les cercles BCD, CAD, ABD, CBA, dont nous désignons les centres par A_1, B_1, C_1, D_1. Le quadrangle ABCD étant convexe, les centres A_1, B_1, C_1, D_1 seront les sommets consécutifs d'un quadrangle convexe $A_1B_1C_1D_1$. La trigonométrie ordinaire donne

$$A_1C_1 = \pm \tfrac{1}{2} f (\cot A + \cot C), \quad B_1D_1 = \mp \tfrac{1}{2} g (\cot B + \cot D),$$

(*) La première expression de $-\Delta$ est le développement du déterminant trouvé ci-dessus; elle représente 16 fois le carré de l'aire du triangle dont les côtés ont pour mesure les produits ac, bd, fg; l'angle compris entre les premiers côtés étant égal à A + C ou π − A − C, la seconde expression de Δ s'obtient facilement.

d'où il suit

$$\frac{ABCD}{A_1B_1C_1D_1} = \frac{fg}{A_1C_1 \times B_1D_1} = -\frac{4}{(\cot A + \cot C)(\cot B + \cot D)} = -\frac{4 \sin A \sin B \sin C \sin D}{\sin (A + C) \sin (B + D)},$$

$$\frac{ABCD}{A_1B_1C_1D_1} = \operatorname{tg}^2 \varphi. \tag{5}$$

Comme cas particulier, on a le théorème suivant : « *Lorsque l'aire d'un quadrangle convexe* ABCD *est égale à celle du quadrangle convexe* $A_1B_1C_1D_1$, *qui a pour sommets les centres des cercles* BCD, CAD, ABD, CBA, *les axes des deux paraboles circonscrites à* ABCD *font un angle de 45°*, et réciproquement.

V. D'autres expressions sont obtenues, si l'on fait intervenir les rayons $R_1, \ldots R_4$ des cercles BCD, ..., CBA, et les rayons $R'_1, \ldots, R'_4$ des cercles $B_1C_1D, \ldots C_1B_1A_1$, dont nous appelons les centres A_2, B_2, C_2, D_2.

On vérifiera sans difficulté les relations suivantes :

$$R_1R'_1 = R_2R'_2 = R_3R'_3 = R_4R'_4 = \cot\varphi \sqrt{R_1R_2R_3R_4} = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{R'_1R'_2R'_3R'_4}.$$

D'ailleurs, on démontrera que les quadrangles ABCD et $A_1B_1C_1D_1$, quoique n'ayant pas les angles égaux, ont pourtant le même angle φ. Il en résulte

$$\frac{A_1B_1C_1D_1}{A_2B_2C_2D_2} = \operatorname{tg}^2 \varphi ;$$

par suite,

$$\frac{ABCD}{A_2B_2C_2D_2} = \operatorname{tg}^4 \varphi .$$

Or les deux figures ABCD et $A_2B_2C_2D_2$ étant semblables, leur rapport de similitude est égal à $\operatorname{tg}^2 \varphi$; conséquemment on peut écrire

$$\frac{BC}{B_2C_2} = \frac{CA}{C_2A_2} = \frac{AB}{A_2B_2} = \cdots = \operatorname{tg}^2 \varphi. \tag{6}$$

VI. Passons maintenant à l'évaluation des paramètres p_1 et p_2.

De l'équation (1) on déduit par les méthodes ordinaires

$$p_2^2 = \frac{p_1^2 (8s_2 + s_1^3 - 4s_1s_2)^2}{(16p_1^2 + s_1^2)^5}. \tag{7}$$

On pourrait en conclure (en désignant par I l'aire du quadrangle convexe ordinaire ABCD) la relation très symétrique

$$p_1p_2 = \pm\frac{I}{16}\sin^5\varphi\sqrt{\frac{\sin(A+B)\sin(B+C)\sin(C+D)\sin(D+A)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}}, \quad (8)$$

mais nous n'insistons pas sur la démonstration, parce que nous avons en vue des formules moins compliquées.

Pour les obtenir, il est nécessaire de chercher les coordonnées des points A_1, B_1, C_1, D_1 et de leur centre de gravité G_1. Le cercle ABC, représenté par

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + c = 0,$$

coupe la parabole P_1 en quatre points dont les ordonnées sont $y_1, y_2, y_3, -(y_1+y_2+y_3)$. Il n'y a donc aucune difficulté à calculer les coordonnées α_4, β_4 de son centre. On trouve

$$4p_1\alpha_4 = 4p_1^2 + s_1^2 - s_2 - s_1y_4,$$
$$8p_1^2\beta_4 = s_3 - s_1s_2 + s_1^2y_4 - s_4y_4^2.$$

Un changement des indices donnera les coordonnées des points A_4, B_4, C_4, puis celles du centre de gravité G_4 (x_0', y_0'). Il viendra

$$16p_1x_0' = 4p_1\Sigma\alpha = 16p_1^2 + 3s_1^2 - 4s_2, \quad 16p_1^2y_0' = 4p_1^2\Sigma\beta = 2s_3 - s_1s_2.$$

D'autre part, les coordonnées du point G sont déterminées par

$$16p_1x_0 = 2s_1^2 - 4s_2, \quad 16p_1^2y_0 = 4p_1^2s_1.$$

On en déduit

$$y_0' = y_0 + \frac{2s_3 - 4p_1^2s_1 - s_1s_2}{16p_1^2} = y_0 + \frac{p_1(8s_3 + s_1^3 - 4s_1s_2) - s_1(16p_1^2 + s_1^2)}{64p_1^3},$$

$$x_0' = x_0 + \frac{16p_1^2 + s_1^2}{16p_1}.$$

En tenant compte de l'équation (7), qui donne

$$(8s_3 + s_1^3 - 4s_1s_2) = \frac{p^2}{p_1}(16p_1^2 + s_1^2)^{\frac{3}{2}},$$

et de la relation

$$s_1 = 4p_1\cos\varphi,$$

on trouve facilement

$$x_0' = x_0 + \frac{p_1}{\sin^2\varphi}, \quad y_0' = y_0 + \frac{p_2 - p_1\cos\varphi}{\sin^3\varphi}.$$

De là, on tire

$$(y_0' - y_0)^2 + (x_0' - x_0)^2 = GG_1^2 = \frac{1}{\sin^6 \varphi}(p_2^2 + p_1^2 - 2p_1p_2 \cos\varphi). \quad (9)$$

Telle est la première équation, qui peut servir à définir les paramètres. Nous allons en indiquer une seconde ayant presque la même forme.

Pour cela il nous faut chercher les coordonnées (ξ, η) du centre E de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle. Cette hyperbole pourra être représentée par

$$16p_1^2x^2 - 16p_1^2y^2 + 4s_4 - 4s_2y + 2p_1x(3s_2 + 16p_1^2) - 8p_1s_1xy = 0,$$

puisque l'équation doit être de la forme

$$h(y^2 - 2p_1x) + (4p_1x - s_1y)^2 + 4s_4 - 4s_2y + 2p_1x(4s_2 - s_1^2) = 0.$$

On en tire, eu égard à l'équation (7), pour les coordonnées du centre

$$\xi = x_0 - \frac{p_2 \cos\varphi + p_1}{\sin^2\varphi}, \quad \eta = y_0 - \frac{p_2}{\sin\varphi},$$

ce qui donne

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 = EG^2 = \frac{1}{\sin^4\varphi}(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\varphi). \quad (10)$$

Les équations (9) et (10) font connaître les valeurs des paramètres p_1 et p_2.

Nous ajoutons aux relations précédentes encore la suivante :

$$\operatorname{tg} G_1GE = \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2^2 + p_1^2}\cot\varphi, \quad (11)$$

qui est intéressante, puisqu'elle permet de voir si les deux paraboles circonscrites sont ou ne sont pas égales.

En effet, cette formule donne lieu à l'énoncé suivant : « Un quadrangle complet non inscriptible ABCD étant donné, on considère : 1° le point G, centre de gravité des sommets ; 2° le point G_1, centre de gravité des centres des cercles BCD, CAD, ABD, CBA ; 3° le point E, centre de l'hyperbole équilatère circonscrite, point d'intersection des quatre cercles de neuf points (ou bien le point E' intersection des quatre cercles qui passent par les milieux de trois côtés ayant une extrémité commune) (*). Si les points G, G_1 et E (ou bien E') sont en ligne droite, les deux para-

(*) Voir « *Mathesis*, 1891, sur les quadrangles complets, par M. J. Neuberg, p. 190. »

boles circonscrites au quadrangle seront égales, et dans ce cas la droite G_1GE sera la bissectrice de l'angle φ des axes. »

On démontrera facilement la dernière partie de cet énoncé. Pour le quadrangle inscriptible, il y a des modifications. Les axes de P_1 et de P_2 seront perpendiculaires, leur intersection sera le point G. Le point G_1 devient le centre M du cercle circonscrit, et sera constamment, quelle que soit la valeur du rapport $\frac{p_2}{p_1}$, le symétrique de E par rapport à G. La construction des axes se simplifie. Il suffit de mener par G deux droites parallèles aux bissectrices de l'angle que font entre eux deux côtés opposés du quadrangle. On aura maintenant $p_1 = p_2$, si la droite GM fait des angles de 45° avec les axes.

Enfin j'indique encore une formule qui fournit le demi-axe ρ de l'hyperbole équilatère circonscrite en fonction des paramètres p_1 et p_2. Si α, β, γ sont les trois angles des trois paires de côtés opposés, on a

$$\pm \rho^2 = 8 p_1 p_2 \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma.$$

Quoiqu'elle subsiste quand les paraboles sont imaginaires, elle n'est pas d'usage pratique, parce qu'il sera toujours plus commode de calculer d'abord ρ^2 et ensuite p_1 et p_2.

×QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE,

par M. DE ROCQUIGNY.

1. Le nombre $1 \pm n + n^2$ est la somme de deux triangulaires.

En effet, il est égal à

$$\frac{(n \mp 1)\, n}{2} + \frac{(n \pm 1)(n \pm 2)}{2}.$$

2. Les nombres

$$n^2 + n^3 + n^4, \quad 1 + n + n^2 + n^3 + n^4, \quad 1 + n + n^3 + n^4,$$

sont des sommes de trois triangulaires.

En effet, ils sont égaux à

$$\frac{(n^2+n)(n^2+n \mp 1)}{2} + \frac{n(n \pm 1)}{2} + \frac{n^2(n^2 \pm 1)}{2},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2} + \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2}.$$

La même proposition s'applique aux nombres

$$n^2 - n^3 + n^4, \quad 1 - n + n^2 - n^3 + n^4, \quad 1 - n - n^3 + n^4;$$

car il suffit de remplacer n par $-n$.

3. Tout bicarré entier est, de deux manières différentes, la somme de deux triangulaires, et aussi une somme de quatre triangulaires.

Car

$$n^4 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. Aucun nombre triangulaire ne peut être une puissance exacte de 2.

5. Il n'y a pas de cube parfait dans la suite des nombres triangulaires.

6. Le nombre $b^2(a^2 \pm a + 1)$ est la somme de trois triangulaires. En effet,

$$b^2(a^2 \pm a + 1) = \frac{ab(ab \mp 1)}{2} + \frac{(ab \pm b)(ab \pm b \pm 1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}. \quad (1)$$

Ainsi, les nombres

$$3b^2, \quad 7b^2, \quad 13b^2, \quad 21b^2, \quad 31b^2, \quad 43b^2, \quad 57b^2, \quad \ldots$$

sont chacun la somme de trois triangulaires.

7. Toute puissance impaire des nombres 3, 7, 13, 21, ... est la somme de trois triangulaires.

En effet, si $n = a^2 \pm a + 1$, l'égalité (1) donne

$$n^{2p+1} = n^{2p}(a^2 \pm a + 1) = \frac{an^p(an^p \mp 1)}{2} + \frac{(an^p \pm n^p)(an^p \pm n^p \pm 1)}{2} + \frac{n^p(n^p-1)}{2}.$$

8. Les nombres

$$a^{2n} + a^{2n+1} + a^{2n+2}, \quad a^{2n} - a^{2n+1} + a^{2n+2}$$

sont chacun une somme de trois triangulaires.

Cette propriété résulte encore de l'égalité (1); on remplace b par a^{2n}.

9. Les nombres

$$\frac{a^{2n+1}-1}{a-1}, \quad \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$$

peuvent se développer chacun en une somme de $n+1$ nombres triangulaires. On a

$$1+a+a^2+\cdots+a^{2n-1}+a^{2n}=$$
$$\frac{(a+1)(a+2)}{2}+\frac{(a^2+a)(a^2+a-1)}{2}+\frac{(a^3+a^2)(a^3+a^2+1)}{2}+\cdots+$$
$$\frac{(a^n+a^{n-1})(a^n+a^{n-1}\pm 1)}{2}+\frac{a^n(a^n\mp 1)}{2}.$$

Cette égalité peut se déduire du n° 9.

10. On a une solution de l'équation

$$(x^2+y^2-z^2)(x'^2+y'^2-z'^2)=(x''^2+y''^2-z''^2)$$

en prenant

$$x=a-2b,\quad y=2a-b,\quad z=2a-2b,$$
$$x'=a'-2b',\quad y'=2a'-b',\quad z'=2a'-2b',$$
$$x''=aa'\pm bb'-2(ab'\mp a'b),\ y''=2(aa'\pm bb')-(ab'\mp a'b),$$
$$z''=2(aa'\pm bb')-2(ab'\mp a'b)$$

11. Tout cube entier est la somme d'un cube, d'un carré et d'un triangulaire.

$$(a+1)^3=a^3+a^2+\frac{(2a+1)(2a+2)}{2},$$

12. La différence de deux cubes entiers consécutifs est 1° la somme de trois triangulaires; 2° la demi-somme de trois carrés.

En effet,

$$(a+1)^3-a^3=\frac{(2a+1)(2a+2)}{2}+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{a(a+1)}{2}$$
$$=\frac{a^2+(a+1)^2+(2a+1)^2}{2}.$$

13. Les nombres $a^2+b^2\pm a$, $a^2+b^2\pm b$ sont chacun la somme de deux triangulaires

$$a^2+b^2\pm a=\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}+\frac{(a-b)(a-b\pm 1)}{2}.$$

BIBLIOGRAPHIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Traité de Mécanique, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (2e série) et au baccalauréat de l'enseignement moderne (3e série) et des candidats à l'institut agronomique, par E. CARVALLO, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Paris, Nony, 1893. (In-8°, de III- 154 pages. Prix : fr. 2,50).

Ce livre est écrit spécialement pour la classe de mathématiques élémentaires. Il se compose de deux parties : la partie principale, écrite en gros caractères, traite, en 80 pages, les questions explicitement énoncées dans le programme du baccalauréat; la deuxième partie, imprimée en petits caractères, est formée de compléments intercalés dans le texte.

Une introduction (en petit texte) expose quelques notions de géométrie analytique : Règle des signes des segments appartenant à une même droite, théorie des projections, définition des coordonnées cartésiennes.

Le chapitre I traite de la composition des forces agissant sur un même point et de l'équilibre du point matériel libre; il est terminé par 32 exercices. La règle du parallélogramme des forces est établie au moyen d'un lemme sur des forces égales agissant suivant les côtés d'un losange, à partir de deux sommets opposés.

Le chapitre II contient la composition des forces égales, la théorie des centres de gravité et 66 exercices. L'auteur établit l'existence du centre des forces parallèles en décomposant chaque force suivant deux autres dont les lignes d'action passent par deux points fixes situés sur une parallèle à la direction des forces; cette méthode, qui est peut-être nouvelle, conduit immédiatement à un théorème dû à Leibniz. Dans le petit texte, on donne la théorie analytique de la composition des forces parallèles. La théorie du centre de gravité est exposée avec beaucoup de soin, et renferme un grand nombre d'applications bien développées; les théorèmes de Guldin forment l'objet d'un paragraphe spécial.

Le chapitre III expose la composition des forces appliquées à un corps solide, la théorie des couples, les condition d'équilibre de forces agissant sur un corps libre ou gêné par des obstacles; ces questions sont traitées avec tous les développements géométriques ou analytiques qu'on peut désirer; 30 exercices sont proposés à la fin du chapitre.

Dans le quatrième et dernier chapitre, l'auteur étudie les machines simples: Plan incliné, levier, balances (de précision, de Roberval, romaine, de Quintenz), poulies (moufles et palans), treuil; 26 exercices terminent cette étude.

Le traité de Mécanique de M. Carvallo se recommande par la clarté et la rigueur, la nouveauté des méthodes, et le choix judicieux des exercices dont les uns sont des applications immédiates des résultats de la théorie et dont les autres, complétant souvent la théorie ou l'exposant sous un jour nouveau, sont très propres à développer le raisonnement mécanique. La lecture de cet ouvrage constitue une excellente préparation à l'étude de la mécanique rationnelle : les élèves de nos Universités belges pourraient le consulter avec beaucoup de fruit. (J. N.)

L'hyperespace à (n-1) dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale, par G. FONTENÉ, agrégé des sciences mathématiques, professeur au collège Rollin. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1892 (XVIII-133 p. gr. in-8°). Prix : 5 francs.

Le titre de cet ouvrage en indique suffisamment l'objet pour ceux qui se sont occupés de la géométrie non euclidienne considérée comme un chapitre de la théorie des coniques. M. Fontené, au lieu de définir les pseudo-distances et les pseudo-angles par rapport à une quadrique double d'une correspondance par polaires réciproques, observe qu'on peut les définir par rapport aux quadriques des points et des plans doubles d'une corrélation générale et étendre ces notions à un espace analytique à (n — 1) dimensions. Il étudie surtout les propriétés métriques de cette corrélation générale. L'objet de son travail ne rentre pas assez dans le cadre du programme de *Mathesis* pour qu'il soit utile d'en dire davantage.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, par JULES TANNERY, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et JULES MOLK, Professeur à la faculté des Sciences de Nancy. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893. Tome I : *Introduction. Calcul différentiel* (1re Partie) ; 1893. (X-246 p. gr. in-8°). Prix : fr. 7,50.

Le sujet traité dans l'ouvrage considérable (il aura quatre volumes) dont MM. J. Tannery et Molk viennent de commencer la publication, est en dehors des sujets abordés ordinairement dans *Mathesis*. Nous nous contentons donc d'en donner la table des matières.

INTRODUCTION. — Chap. I. *Des séries et produits infinis à termes constants.* Séries et produits infinis à simple entrée. Séries à double entrée. Produits infinis à double entrée. — Chap. II. *Des séries et des produits infinis dont les termes dépendent d'une variable.* Définitions et premières propositions. Séries entières en x. Séries de séries entières. Continuation des fonctions. Application aux équations différentielles linéaires. — Chap. III. *Fonctions transcendantes entières.* Fonctions exponentielles et circulaires. Théorèmes de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler. — CALCUL DIFFÉRENTIEL (1re Partie). Chap. I. *Considérations générales sur les fonctions périodiques.* — Chap. II. *La fonction σu et les fonctions qui en dérivent.* Les trois fonctions σu, ζu, pu. L'argument augmente de $2\omega_\alpha$. Premières relations entre les fonctions σu, ζu, pu, $p'u$. Représentation de σu par un produit infini à simple entrée. Les cofonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Transformation linéaire des fonctions σ. Substitution aux périodes primitives de périodes équivalentes. Transformation d'ordre quelconque des fonctions σ. Substitution aux périodes primitives de périodes nouvelles liées linéairement aux anciennes.

LE CENTENAIRE DE LOBATCHEFSKY (*).

Le 10/22 octobre 1893 est le centième anniversaire de la naissance de l'illustre géomètre russe Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky.

Lobatchefsky appartient incontestablement au nombre des savants du XIX^me^ siècle qui ont ouvert de nouvelles voies à la science. On peut dire de lui, avec Clifford, qu'il est « le Copernic de la géométrie. »

Depuis qu'Euclide a fondé l'édifice immortel de la géométrie sur un petit nombre de définitions, d'axiomes et de postulats, la vérité ou plutôt l'harmonie logique de ces bases de la géométrie n'a été l'objet d'aucun doute. Jusqu'à Lobatchefsky, les efforts des savants de tous les pays et de toutes les époques ont tendu uniquement à réduire au minimum le nombre de ces axiomes et postulats; ainsi, on a fait une foule de tentatives pour déduire le postulatum d'Euclide sur la rencontre de la perpendiculaire et de l'oblique à une même droite des autres définitions, axiomes et postulats; la vérité de ce postulatum, même dans le domaine de la géométrie physique, ne semblait pas douteuse.

Lobatchefsky fut le premier qui découvrit la vraie nature logique du postulatum d'Euclide; il arriva à la conviction qu'admettre cette proposition équivaut à admettre certaines propriétés de notre espace, qui ne peuvent être vérifiées qu'au moyen de l'expérience ou de l'observation; il montra la possibilité d'une géométrie indépendante de ce postulatum d'Euclide. Lobatchefsky a réalisé sa pensée dans une série de mémoires avec l'esprit de suite et l'exactitude « d'un vrai géomètre, » comme le disait Gauss, en 1846.

Mais cette approbation de l'illustre mathématicien de Gœttingue a passé inaperçue et il a fallu attendre encore un quart de siècle pour que le grand mérite scientifique et philosophique des travaux de Lobatchefsky fût unanimement reconnu. Cette juste appréciation des recherches du savant professeur russe fut le résultat des études persévérantes de plusieurs géomètres éminents de notre époque, qui ont montré que la géométrie plane de Lobatchefsky est équivalente à la géométrie euclidienne sur une surface à courbure constante et négative, et que sa géométrie solide introduit dans la science la notion nouvelle d'un espace ayant une courbure.

La géométrie de Lobatchefsky et, en général, la géométrie non euclidienne forme une nouvelle branche des mathématiques possédant déjà une riche littérature à laquelle se rattachent les recherches sur les hyperespaces. Celles-ci, tout en jetant une vive lumière sur plusieurs questions de géométrie, sont un auxiliaire qu'on ne peut remplacer que difficilement dans maintes questions difficiles d'analyse.

A la haute valeur scientifique des découvertes de Lobatchefsky correspond leur importance philosophique qui n'est pas moins grande; d'une part, elles permettent d'étudier plus à fond les propriétés de l'espace; d'autre part, elles jettent une vive lumière sur la question de l'origine de nos axiomes géométriques et ont, en conséquence, une grande valeur pour la théorie de la connaissance.

(*) Extrait de la circulaire du comité, modifiée par nous. Lobatchefsky est mort le 12/24 février 1856. (P. M.

***

L'Université Impériale de Kasan a eu la gloire d'avoir Lobatchefsky au nombre de ses élèves et de ses membres; Lobatchefsky y a rempli les fonctions de professeur de 1812 à 1846 et celles de recteur de 1827 à 1846. Ce n'est pas seulement comme savant et comme professeur que Lobatchefsky est cher à l'Université de Kasan. L'histoire de la vie et des travaux de Lobatchefsky, dit son biographe, est inséparablement liée à celle de notre Université; il a été le premier de ses élèves qui devint professeur. C'est à lui qu'elle doit la construction de ses principaux batiments et l'organisation de sa bibliothèque.

La Société physico-mathématique de Kasan ne pouvait se dispenser de célébrer dignement l'anniversaire du jour de la naissance du grand mathématicien russe. Ayant obtenu l'auguste autorisation d'ouvrir une souscription pour réunir un fonds portant le nom de Lobatchefsky, elle s'adresse maintenant aux savants de tous les pays, aux nombreux amis de la science en les priant de vouloir bien prendre part à cette souscription.

Selon que la somme rassemblée sera plus ou moins élevée, la Société fondera un prix « Lobatchefsky » pour les travaux mathématiques (spécialement pour ceux qui ont trait à la géométrie non euclidienne), ou bien elle érigera un buste de Lobatchefsky dans l'édifice de l'Université.

Si son appel trouve l'accueil qu'elle a le droit d'attendre, la Société physico-mathématique tâchera de réaliser les deux buts, et l'université de Kasan sera embellie par l'image de l'homme qui l'a fait briller d'une gloire immortelle, et les jeunes savants qui consacreront leurs labeurs à la science aimée de Lobatcheffsky trouveront secours et encouragement dans le prix qui portera son nom (*).

A. VASSILIEF, *Président*, T. SOUVOROF, *vice-président de la Société Physico-mathématique, professeurs de mathématiques à l'Université de Kasan.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

×Question 788.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240).

Soient A, B, C, D *quatre points d'une circonférence. Les perpendiculaires élevées en* A *et* B *sur la corde* AB, *et les perpendiculaires élevées en* C *et* D *sur la corde* CD *forment un parallélogramme. La même construction étant appliquée aux cordes* AC *et* BD *ou aux cordes* AD *et* BC *donne deux autres parallélogrammes. Démontrer que les trois parallélo-*

(*) On prie d'envoyer les souscriptions à l'adresse suivante : KASAN, *Société Physico-mathématique*, ou à M. P. MANSION, professeur à l'Université de Gand.

(**) Nous avions oublié de mentionner antérieurement une bonne solution de la question 794, par M. DÉPREZ.

grammes ont pour centre commun le centre du cercle ABCD *et que leurs diagonales sont perpendiculaires aux côtés du triangle qui a pour sommets les points de concours des couples de cordes* AB *et* CD, AC *et* BD, AD *et* BC.

(A. C.)

Solution par M. P. DELVILLE (Liége). 1° Soient(*) M, P les points de rencontre des perpendiculaires élevées en A et D sur AD avec la perpendiculaire élevée en B sur BC, et soient N, Q leurs points de rencontre avec la perpendiculaire menée en C sur BC. Les droites MN, QP étant symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de AD, elles le sont aussi par rapport au centre O du cercle ABCD; les droites MP, NQ étant, pour une raison analogue, symétriques par rapport à O, O est le centre du parallélogramme MNPQ.

2° Appelons R le point de concours des cordes AD et BC, S celui des cordes BD et AC. Les circonférences décrites sur RP et RN comme diamètres passent respectivement par D et B, A et C. Ces circonférences et la circonférence ABCD ont donc pour axes radicaux DB et AC; par suite, les deux premières ont pour axe radical la droite RS. Cet axe est perpendiculaire à la ligne des centres, et celle-ci est parallèle à NP; donc RS est perpendiculaire à NP.

Solution par MM. DROZ FARNY, CATANIA *et* DÉPREZ. Soient A', B', C', D' les points diamétralement opposés à A, B, C, D, et soient T, S, R les points de concours des couples de cordes AB et CD, AC et BD, AD et BC. On sait que le triangle RST est autopolaire (conjugué) par rapport au cercle donné; donc le centre O de ce cercle est l'orthocentre du triangle.

Cela posé, l'un des parallélogrammes a pour côtés opposés AD' et DA', BC' et CB'; soient M, Q les sommets (AD', BC'), (DA', CB'). Si l'on applique le théorème de Pascal, d'une part à l'hexagone ABC'CDA', d'autre part à l'hexagone BAD'DCB', on trouve que les points T, P, O sont en ligne droite de même que les points T,N,O. Donc les points N, T, P, O sont sur une même droite, hauteur du triangle RST.

REMARQUES. Une projection centrale conduit à la proposition suivante:

Soient A, B, C, D quatre points d'une section conique, les droites qui les joignent à un point quelconque O rencontrent la courbe en quatre nouveaux points A', B', C', D'. Les droites AD' et CB' se coupent en un point L, les droites BC' et DA' se rencontrent en un point L'; les points

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

L, L′ sont en ligne droite avec le point O, et avec les points de rencontre des cordes AB et CD, A′B′ et C′D′.

Un théorème analogue s'applique aux coniques sphériques.

(H. Déprez).

M. Bellens (Anvers) a donné une bonne solution de la même question.

Voici une autre démonstration de la première partie.

Si les perpendiculaires élevées en A sur AB et en D sur DC se coupent en L, et que les perpendiculaires élevées en B sur AB et en C sur CD se rencontrent en L′, il est facile de voir que les perpendiculaires élevées sur AB et sur DC en deux points divisant AB et DC dans un même rapport concourent sur la droite LL′. Or, les perpendiculaires élevées aux milieux de AB et DC, puis celles abaissées du point de rencontre des cordes AC, BD sur AB, DC sont dans ce cas; donc, etc. (J. N.)

Question 792.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240).

Quelles sont les courbes dont le cercle de courbure passe par un point fixe. (H. Mandart.)

Soient O le point fixe, M un point de l'une des courbes cherchées, MN le diamètre du cercle de courbure en M. Si l'on prend le point fixe O pour origine d'un système de coordonnées polaires r et θ, ON et MN seront respectivement la sous-normale et la normale polaires. Par suite, les courbes cherchées sont celles dont la normale polaire est double du rayon de courbure. On a donc, pour l'équation différentielle de ces courbes,

$$\sqrt{r^2+r'^2} = \pm 2\frac{(r^2+r'^2)\sqrt{r^2+r'^2}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

ou encore, successivement,

$$2r^2+2r'^2 = \pm(r^2+2r'^2-rr''),\ r^2+rr''=0,\text{ et } 3r^2+4r'^2-rr'',$$

$$r+r''=0,\text{ et } 3\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right)=\frac{rr''-r'^2}{r^2}=\mathrm{D}\frac{r'}{r}.$$

L'intégrale générale de la première de ces équations est

$$r = \mathrm{A}\cos(\theta+\mathrm{B});$$

cette équation représente tous les cercles passant par le point donné.

Cette solution était connue d'avance. L'autre équation peut s'écrire

$$3\,d\theta = \frac{d\left(\frac{r'}{r}\right)}{1+\frac{r'^2}{r^2}},$$

laquelle étant intégrée donne

$$3(\theta + B) = \text{arc tang}\frac{r'}{r}, \quad \frac{r'}{r} = \text{tang } 3(\theta + B),$$

puis, par une seconde intégration,

$$r^3 = \frac{A}{\cos 3(\theta + B)},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Cette équation représente des courbes semblables à l'inverse de la rosace à trois feuilles

$$r^3 = \cos 3\theta,$$

par rapport à l'origine. (P. M.)

Autres solutions par MM. H. Brocard et H. Lembourg.

×Question 797.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 264.)

Si dans un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés, le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, on peut inscrire une couronne de cercles tangents, consécutifs et tangents au cercle circonscrit aux sommets du polygone, quel que soit le premier cercle.

(Éd. Lucas).

Solution par M. Sollertinsky. Soit $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ le polygone donné. Puisque l'égalité

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{2n-1}A_{2n}}{A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{2n}A_1} = 1 \qquad (1)$$

ne change pas dans l'inversion, on pourrait simplifier la démonstration en prenant un point quelconque de la circonférence donnée O pour centre d'inversion. Mais voici une démonstration directe.

Soit O_1 le centre d'un cercle quelconque tangent en A_1 à O; on construit successivement les cercles O_2, O_3 ..., O_{2n} de manière que

chacun d'eux soit tangent au précédent et au cercle donné au sommet correspondant du polygone donné. Il nous reste à démontrer que le dernier cercle O_{2n} touche aussi le premier O_1.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les cercles O, O_1 se touchent extérieurement. On sait que les points A_k, A_{k+1} sont alors les points de contact du cercle inscrit au triangle OO_kO_{k+1}. Par suite, R, R_k, R_{k+1} désignant les rayons des cercles,

$$\sin\frac{O}{2} = \sqrt{\frac{R_k \cdot R_{k+1}}{(R+R_k)(R+R_{k+1})}};$$

d'où

$$A_kA_{k+1} = 2R\sqrt{\frac{R_k \cdot R_{k+1}}{(R+R_k)(R+R_{k+1})}}.$$

On déduit donc, de la relation (1),

$$A_1A_{2n} = 2R\sqrt{\frac{R_1R_{2n}}{(R+R_1)(R+R_{2n})}};$$

d'où

$$\sin\frac{A_1OA_{2n}}{2} = \sqrt{\frac{R_1R_{2n}}{(R+R_1)(R+R_{2n})}}.$$

La supposition que le cercle inscrit au triangle O_1OO_{2n} touche les côtés OO_1, OO_{2n} aux points α_1, α_{2n} nous conduirait à l'égalité

$$R_1R_{2n} = O_1\alpha \cdot O_{2n}\alpha_{2n};$$

celle-ci est impossible, car les facteurs de l'un de ces produits sont d'une même quantité plus grands que ceux de l'autre. Les points α_1, α_{2n} coïncident donc avec A_1, A_{2n}, et, par suite, le cercle O_{2n} touche le cercle O_1.

La même question a été résolue par MM. Soons (Tirlemont), J. Wasteels (Hasselt) et Déprez (Mons).

×Question 807.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

On a

$$\frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \cdots + \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2} =$$

$$\frac{x}{1-x}(1+x^n) + \frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2n}) + \cdots + \frac{x^n}{1-x^n}(1+x^{n^2}).$$

(Baschwitz.)

Solution par M. Sollertinsky. Nous représentons cette identité par

$$\Sigma_1^n \frac{1+x^p}{1-x^p} x^{p^2} = \Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}(1+x^{np}), \qquad (1)$$

le signe sommatoire s'étendant aux valeurs entières successives de p.

Le second membre peut être transformé ainsi :

$$\Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}(1+x^{np}) = \Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}[1+x^{(n+1)p}-x^{(n+1)p}+x^{np}] =$$

$$\Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}[1+x^{(n+1)p}] + \Sigma_1^n x^{(n+1)p};$$

le dernier terme étant égal à

$$x^{n+1}[1+x^{n+1}+x^{2(n+1)}+\dots+x^{(n-1)(n+1)}] = x^{n+1}\frac{1-x^{n(n+1)}}{1-x^{n+1}} =$$

$$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}[1+x^{(n+1)^2}] - \frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2},$$

on a

$$\Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}(1+x^{np}) = \Sigma_1^{n+1} \frac{x^p}{1-x^p}[1+x^{(n+1)p}] - \frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2}. \qquad (2)$$

Cela posé, si la formule est vraie pour une certaine valeur de n, et qu'on y remplace le second membre par la valeur (2), on obtient, après transposition du dernier terme, la formule (1) avec le changement de n en $(n+1)$; or l'identité proposée se vérifie immédiatement pour $n=1$; donc elle est générale.

×Question 812.

(Voir *Mathesis*, (2), t. III, p. 56.)

Soient A, B, C *les angles d'un triangle*, ω *l'angle de Brocard. Démontrer que les différences*

$\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C$, $\sin^4 B - \sin^2 C \sin^2 A$, $\sin^4 C - \sin^2 A \sin^2 B$

sont proportionnelles aux quantités

$$\operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} A, \quad \operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} B, \quad \operatorname{cotg}^2 2\omega - \operatorname{cotg} C.$$

Solution par MM. H. Brocard et Droz Farny. On a, par des formules

connues (voir N. C. M. 1879; A. F., Alger, 1881 et Rouen, 1883; J. S. 1883 et 1885 etc. etc.)

$$\operatorname{cotg} 2\omega = \frac{\Sigma a^4}{4S.\Sigma a^2}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\Sigma a^2 - 2a^2}{4S},$$

S désignant la surface du triangle. On en déduit;

$$\operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} A = \frac{a^4 - b^2c^2}{2S\Sigma a^2};$$

ce qui établit la proposition.

Solution par MM. W. J. Greenstreet, M. A. Deprez, Droz Farny, Quint *et* M^lle^ de Haas. On a

$$\cot 2\omega - \cot A = \frac{\cot^2\omega - 1}{2\cot\omega} - \cot A = \frac{(\Sigma \cot A)^2 - 1}{2\Sigma \cot A} - \cot A$$

$$= \frac{(\cot B + \cot C)^2 - \operatorname{cosec}^2 A}{2\Sigma \cot A} = \frac{\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C}{2\Sigma \cot A \prod \sin^2 A}, \text{ etc.}$$

Question CIV.

(N. C. M., II, p. 159, 174; Laisant IV, n° 571, p. 143).

Soit M *un point quelconque d'une courbe plane* (C), *soit* P *le point de la podaire de* (C) *qui correspond à* M, O *étant le pôle, soit enfin* ε *l'angle de contingence de* (C) *et* $d\sigma$ *l'élément de la podaire. On a* $d\sigma = OM.\varepsilon$.

(Catalan).

Solution par un Abonné. Cette question est presque classique, et c'est sans doute pour cela qu'aucune solution n'en a été publiée. En voici une qui est tout à fait élémentaire.

Soient M, M′ deux points voisins de la courbe, M_1 le point de rencontre des tangentes en M, M′ et P, P′ les points correspondants de la podaire. Les quatre points M_1, P, P′, O sont sur une même circonférence de diamètre OM_1. Dans le triangle M_1PP', on a

$$\frac{PP'}{\sin PM_1P'} = \frac{M_1P}{\sin PP'M_1} = \frac{M_1P}{\sin POM_1} = OM_1.$$

Si l'on suppose que M′ se rapproche indéfiniment de M, la limite du premier membre est $\frac{d\sigma}{\varepsilon}$; celle de OM_1 est OM. Donc $d\sigma = OM.\varepsilon$.

Comparez Catalan, *Mélanges mathématiques*, CXLIX.

Question CCCXXXVIII.

(*N. C. M.*, IV, 125; LAISANT, IV, n° 718, *p.* 184.)

Une ellipse dont les axes sont connus, tourne dans son plan autour de son centre. Dans chacune de ses positions, on lui mène des tangentes aux points où elle est coupée par deux droites rectangulaires fixes, menées par ce centre. Quel est le lieu du point de rencontre de ces tangentes? On considère en outre, les cordes de contact ainsi déterminées dans l'ellipse, et l'on demande le lieu de leurs intersections successives (Concours académique de Lille, 1875).

Solution par M. BARISIEN. 1° Prenons les deux droites rectangulaires fixes comme axes de coordonnées, et soient a et b les longueurs des demi-axes de l'ellipse. L'équation de cette ellipse est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

avec les conditions

$$a^2 + b^2 = \frac{A + C}{AC - B^2}, \quad a^2b^2 = \frac{1}{AC - B^2}. \tag{1}$$

Les tangentes aux points de rencontre de l'ellipse avec les axes de coordonnées ont pour équations

$$Ax + By = \sqrt{A}, \quad Bx + Cy = \sqrt{C}. \tag{2}$$

Le lieu du point de rencontre de ces tangentes s'obtiendra en éliminant A, B et C entre les équations (1) et (2). En résolvant les dernières par rapport à x et à y, on trouve

$$x(\sqrt{AC} + B) = \sqrt{C}, \quad y(\sqrt{AC} + B) = \sqrt{A}, \tag{3}$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}.$$

Mais, des égalités (1), on tire

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2}, \quad A + C = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.$$

Donc

$$\frac{A}{y^2} = \frac{C}{x^2} = \frac{A + C}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2(x^2 + y^2)}.$$

Par suite,

$$A = \frac{y^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}, \quad C = \frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}. \tag{4}$$

De la première équation (3), combinée avec la relation

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2},$$

on déduit

$$\sqrt{AC} + B = \frac{\sqrt{C}}{x}, \quad \sqrt{AC} - B = \frac{x}{a^2b^2\sqrt{C}};$$

d'où, par addition,

$$2\sqrt{AC} = \frac{\sqrt{C}}{x} + \frac{x}{a^2b^2\sqrt{C}}.$$

Remplaçant A et C par les valeurs (4), on obtient

$$a^2b^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+a^2+b^2)^2 = 4x^2y^2(a^2+b^2)^3.$$

Le lieu demandé est donc une courbe du sixième ordre ; l'origine est un centre et un point isolé.

2° La corde de contact a pour équation

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 1;$$

la distance au centre, si l'on tient compte de (1), est

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A+C}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cette distance étant constante, la corde de contact enveloppe une circonférence concentrique à l'ellipse. Cette propriété est connue.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

561. Étant donnés un cercle O, de rayon r, et deux tangentes parallèles AA′, BB′, on décrit deux autres cercles O′, O″ qui se touchent mutuellement, qui touchent le cercle O et dont le premier est tangent à AA′, le second à BB′. Trouver la relation entre les rayons r, x, y des trois cercles.

Soient A′, B′ les points de contact des cercles O′, O″ avec les parallèles. On a

$$O'\overline{O''}^2 \text{ ou } (x+y)^2 = (2r-x-y)^2 + (AA'-BB')^2;$$

mais

$$AA' = 2\sqrt{rx}, \quad BB' = 2\sqrt{ry}; \quad \text{donc} \quad 2\sqrt{xy} = r.$$

562. Résoudre le système

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} 2y, \quad \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} 2x.$$

On trouve

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{1 + 2b^2 - 2ab \pm 2b\sqrt{1 + (a-b)^2}}.$$

Discussion.

563. Un nombre étant écrit dans le système de numération à base 13, indiquer les caractères de divisibilité par les nombres 3, 4, 7.

564. Trouver les formules générales résolvant l'équation

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)\, z^2. \tag{1}$$

En écrivant

$$(x + az)(x - az) = (bz + y)(bz - y),$$

on est conduit à poser

$$x + az = \frac{p}{q}(bz + y), \quad x - az = \frac{q}{p}(bz - y),$$

p et q étant deux indéterminées; d'où

$$x = 2bpq + a(p^2 - q^2), \quad y = 2apq + b(q^2 - p^2), \quad z = p^2 + q^2.$$

Autrement. Posons $x = az - p$, $y = bz - q$. En substituant dans (1), on trouve successivement

$$z = \frac{p^2 + q^2}{2(ap + bq)}, \quad x = \frac{2bpq + a(p^2 - q^2)}{2(ap + bq)}, \text{ etc.}$$

On peut ensuite négliger les dénominateurs.

565. On donne l'angle C d'un triangle ABC et la relation

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}.$$

Trouver A et B; discuter.

QUESTIONS PROPOSÉES.

837. On donne deux droites Ox, Oy et un point S. Une sécante menée par S rencontre Ox en M, Oy en M'. On construit le triangle SMP directement semblable au triangle SOM'. Le lieu de P est une conique ayant pour foyer S. (*Collège d'Aberystwyth*, Examens de 1892.)

838. Si N − 1 et N + 1 sont premiers, le nombre $2N^2 + 2$, somme de deux carrés, est aussi la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés, la somme de cinq carrés(*). (E. CATALAN.)

(*) Il y a exception pour N = 2.

×**839.** x étant un arc moindre que $\frac{1}{4}\pi$ démontrer par des considérations élémentaires que

$$\operatorname{tg} x - x < \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}. \qquad \text{(F. Giudice.)}$$

×**840.** Trouver les valeurs de y et z telles que les polynômes

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y, \quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

aient un facteur commun du second degré.

×**841.** Soient A′, B′, C′ les points où les symédianes d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite; soient V, W les centres isodynamiques. Démontrer que B′ et C′ sont les centres isodynamiques du triangle AVW, et que B, C sont les centres isodynamiques du triangle A′VW. (Sollertinsky.)

842. Trouver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(x \sin\theta)\, d\theta. \qquad \text{(Greenstreet.)}$$

×**843.** Sur les arêtes AD, BD, CD d'un tétraèdre ABCD, on prend trois longueurs égales $AA' = BB' = CC' = \lambda$. Trouver le lieu décrit par le point d'intersection des plans BCA′, CAB′, ABC′ lorsque λ varie.

844. Par le point de rebroussement O d'une cissoïde droite, on mène un rayon vecteur OA. Le cercle de diamètre OA rencontre la cissoïde en un autre point B. La corde AB rencontre la cissoïde en un troisième point C. Montrer que : 1° La corde AB enveloppe une parabole (P) quand le vecteur OA varie; 2° Les tangentes à la cissoïde en A et C se rencontrent sur une ellipse; 3° La perpendiculaire élevée en A à OA enveloppe la parabole (P). (E. N. Barisien).

845. Par deux points fixes D, E pris sur le côté AB du triangle de référence ABC, on mène des tangentes à une parabole quelconque inscrite à ce triangle. Trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes. (V. Retali.)

Rectification. Page 103, question 559, lire 4661, au lieu de 4761.

SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES;

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Soient α et α', β et β' les points d'intersection des axes principaux d'un système de coniques homofocales, avec deux droites conjuguées rectangulaires (*), dont l'une $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe M. Les ponctuelles décrites par les points α et α' sont perspectives, celles décrites par les points α et β, ou α' et β' sont involutives ; par conséquent les ponctuelles (β) et (β') sont projectives, et la droite $\beta\beta'$ enveloppe une conique. Cette courbe est d'ailleurs une parabole, car la droite conjuguée rectangulaire du diamètre OM est à l'infini. La droite $\beta\beta'$ est la polaire du point M par rapport à une conique du système homofocal ; la longueur de l'axe $\alpha\beta$ pour cette conique, est égale à $2\sqrt{OM'.O\beta}$, si M' est la projection du point M sur cet axe. Donc : *si une droite tourne autour d'un point fixe, la conjuguée rectangulaire enveloppe une parabole* (P). *Cette parabole est aussi l'enveloppe des polaires du point fixe par rapport au système de coniques homofocales* (Théorème connu).

2. Par le point M, menons les deux droites conjuguées rectangulaires MT et MN, elles sont tangentes aux deux coniques homofocales S_1 et S_2 passant par le point M. La parabole (P) peut être considérée comme l'enveloppe des perpendiculaires abaissées des points de la tangente MT sur leurs polaires respectives par rapport à la conique S_1. Cette parabole sera donc tangente à MN au centre de courbure μ_1 de la courbe S_1 au point M, et à la droite MT au pôle de MN par rapport à la conique S_1. Les mêmes considérations appliquées à la conique S_2 montrent que la parabole (P) est tangente à MT au centre de courbure μ_2 de la conique S_2 au point M, et à la droite MN au pôle de la droite MT, par rapport à la conique S_2. Par conséquent : *Lorsque deux coniques homofocales* S_1 *et* S_2 *se*

(*) Si d'un point P on mène les tangentes PQ, PQ' à une conique du système homofocal, les bissectrices de l'angle QPQ' et de son supplément adjacent sont des droites conjuguées rectangulaires par rapport à cette conique et à une conique quelconque du système ; elles divisent harmoniquement la distance FF' des foyers. Réciproquement, deux droites rectangulaires qui divisent harmoniquement FF' sont conjuguées par rapport à une conique quelconque du système homofocal.

coupent en M, *le centre de courbure de* S_1 *au point* M, *est le pôle par rapport à* S_2 *de la tangente menée à la conique* S_1 *au point* M (*).

3. On peut déterminer les points de contact de cette parabole avec les axes du système. Le point β sera un de ces points, si la droite $\beta\beta'$ coïncide avec un axe ; c'est-à-dire si $M\alpha$ est perpendiculaire à cet axe. *Les points de contact cherchés sont donc les conjugués, par rapport aux foyers, des projections du point* M *sur les axes.*

Connaissant les points de contact des axes avec la parabole (P), on peut déterminer le point de contact μ_1, de la droite MN avec la même courbe ; on arrive à la construction suivante : *Soient* M_1 *et* M_2 *les conjugués par rapport aux foyers des projections du point* M *sur les axes,* N_1 *et* N_1' *les points où la normale* MN *coupe les mêmes axes, les droites* M_1N_1' *et* M_2N_1 *se coupent sur le diamètre passant par le centre de courbure* μ_1.

4. Considérons deux droites quelconques l et l' se coupant au point M ; les pôles P, P_1, ..., et P_1, P_1', ... de ces deux droites par rapport au système homofocal, sont situés sur deux droites PP_1 et $P'P_1'$ respectivement perpendiculaires aux droites l et l', et tangentes à la parabole (P). Les droites PP', P_1P_1' ... sont les polaires du point M par rapport au système de coniques; elles sont donc tangentes à la parabole (P) et les deux ponctuelles P, P_1, ... et P', P_1', ... sont semblables. Par conséquent : *Les pôles de deux droites par rapport à un système de coniques homofocales, décrivent deux ponctuelles semblables* (Théorème connu).

5. Soient N_1 et N_2, les points d'intersection des droites MN et MT avec l'un des axes; les pôles de MT par rapport aux coniques S_1 et S_2, et par rapport aux foyers situés sur cet axe, sont M, μ_1, N_1. Ceux de la droite MN sont μ_2, M, N_2. D'après le théorème du N° 4, on a

$$\frac{MN_1}{M\mu_1} = \frac{\mu_2N_2}{\mu_2M_2} \quad \text{ou} \quad \frac{MN_1}{M\mu_1} + \frac{MN_2}{M\mu_2} = 1.$$

Donc : *Si en un point* M *commun à deux coniques homofocales,* N_1 *et* N_2 *sont les points d'intersection des normales avec l'un des axes,* μ_1 *et* μ_2 *les centres de courbure, on a*

$$\frac{MN_1}{M\mu_1} + \frac{MN_2}{M\mu_2} = 1. \qquad (a)$$

Soient ν_1 et ν_2 les milieux des segments interceptés par les axes, sur les

(*) SALMON, *Sections coniques*, p. 642.

deux normales MN_1 et MN_2; en ajoutant les égalités (a) relatives aux deux axes, on obtient

$$\frac{M\nu_1}{M\mu_1}+\frac{M\nu_2}{M\mu_2}=1.$$

6. Le diamètre OM est la directrice de la parabole (P); donc la perpendiculaire abaissée de M sur la droite $\mu_1\mu_2$, et la droite OM sont également inclinées sur la droite MN; par conséquent, si O_1 et O_2 sont les projections du centre O sur les normales $M\mu_1$ et $M\mu_2$, on a

$$\frac{OO_2}{M\mu_1}=\frac{OO_1}{M\mu_2}.$$

Les rayons de courbure en un point M *commun à deux coniques homofocales, sont liés par la relation* $OO_1 . M\mu_1 = OO_2 . M\mu_2$.

7. Soient a_1 et b_1, a_2 et b_2 les demi-axes des deux coniques S_1 et S_2; on a

$$M\mu_1=\frac{a_1^2b_1^2}{\overline{OO_1}^3},\quad M\mu_2=\frac{a_2^2b_2^2}{\overline{OO_2}^3};$$

d'où

$$\frac{M\mu_1}{M\mu_2}=\frac{a_1^2b_1^2}{a_2^2b_2^2}\cdot\frac{\overline{OO_2}^3}{\overline{OO_1}^3}=\frac{a_1^2b_1^2}{a_2^2b_2^2}\cdot\frac{\overline{M\mu_1}^3}{\overline{M\mu_2}^3},$$

donc

$$\frac{M\mu_1}{M\mu_2}=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}.$$

Les courbures en un point commun à deux coniques homofocales, sont proportionnelles aux rectangles des axes.

Note. La parabole considérée par M. Servais est la même que celle qui nous a servi à démontrer géométriquement un théorème de M. Mennesson (*Mathesis*, p. 77). Le lecteur trouvera quelques développements sur les coniques homofocales, complétant ceux de notre savant collègue de Gand, dans une Note de *Mathesis*, (1), 1, p. 147. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Les lieux géométriques en géométrie élémentaire, par M. P. Sauvage, professeur de mathématiques (Saint-Cyr) au lycée de Montpellier. Paris, Gauthier-Villas et fils, 1893. Un vol. in-8° de VII-13 pages. Prix : 3 francs.

L'auteur s'est proposé « de donner aux élèves des idées générales sur les lieux géométriques et de résumer en un petit nombre de méthodes simples, facilement

connues (voir N. C. M. 1879; A. F., Alger, 1881 et Rouen, 1883; J. S. 1883 et 1885 etc. etc.)

$$\operatorname{cotg} 2\omega = \frac{\Sigma a^4}{4S.\Sigma a^2}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\Sigma a^2 - 2a^2}{4S},$$

S désignant la surface du triangle. On en déduit;

$$\operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} A = \frac{a^4 - b^2c^2}{2S\Sigma a^2};$$

ce qui établit la proposition.

Solution par MM. W. J. Greenstreet, M. A. Deprez, Droz Farny, Quint *et* M^lle^ de Haas. On a

$$\cot 2\omega - \cot A = \frac{\cot^2\omega - 1}{2\cot\omega} - \cot A = \frac{(\Sigma \cot A)^2 - 1}{2\Sigma \cot A} - \cot A$$

$$= \frac{(\cot B + \cot C)^2 - \operatorname{coséc}^2 A}{2\Sigma \cot A} = \frac{\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C}{2\Sigma \cot A \prod \sin^2 A}, \text{ etc.}$$

Question CIV.

(N. C. M., II, p. 159, 174; Laisant IV, n° 571, p. 143).

Soit M *un point quelconque d'une courbe plane* (C), *soit* P *le point de la podaire de* (C) *qui correspond à* M, O *étant le pôle, soit enfin* ε *l'angle de contingence de* (C) *et* $d\sigma$ *l'élément de la podaire. On a* $d\sigma = OM.\varepsilon$.

(Catalan).

Solution par un Abonné. Cette question est presque classique, et c'est sans doute pour cela qu'aucune solution n'en a été publiée. En voici une qui est tout à fait élémentaire.

Soient M, M′ deux points voisins de la courbe, M_1 le point de rencontre des tangentes en M, M′ et P, P′ les points correspondants de la podaire. Les quatre points M_1, P, P′, O sont sur une même circonférence de diamètre OM_1. Dans le triangle M_1PP', on a

$$\frac{PP'}{\sin PM_1P'} = \frac{M_1P}{\sin PP'M_1} = \frac{M_1P}{\sin POM_1} = OM_1.$$

Si l'on suppose que M′ se rapproche indéfiniment de M, la limite du premier membre est $\frac{d\sigma}{\varepsilon}$; celle de OM_1 est OM. Donc $d\sigma = OM.\varepsilon$.

Comparez Catalan, *Mélanges mathématiques*, CXLIX.

Question CCCXXXVIII.

(*N. C. M.*, IV, 125; Laisant, IV, n° 718, *p.* 184.)

Une ellipse dont les axes sont connus, tourne dans son plan autour de son centre. Dans chacune de ses positions, on lui mène des tangentes aux points où elle est coupée par deux droites rectangulaires fixes, menées par ce centre. Quel est le lieu du point de rencontre de ces tangentes? On considère en outre, les cordes de contact ainsi déterminées dans l'ellipse, et l'on demande le lieu de leurs intersections successives (Concours académique de Lille, 1875).

Solution par M. Barisien. 1° Prenons les deux droites rectangulaires fixes comme axes de coordonnées, et soient a et b les longueurs des demi-axes de l'ellipse. L'équation de cette ellipse est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

avec les conditions

$$a^2 + b^2 = \frac{A + C}{AC - B^2}, \quad a^2b^2 = \frac{1}{AC - B^2}. \tag{1}$$

Les tangentes aux points de rencontre de l'ellipse avec les axes de coordonnées ont pour équations

$$Ax + By = \sqrt{A}, \quad Bx + Cy = \sqrt{C}. \tag{2}$$

Le lieu du point de rencontre de ces tangentes s'obtiendra en éliminant A, B et C entre les équations (1) et (2). En résolvant les dernières par rapport à x et à y, on trouve

$$x(\sqrt{AC} + B) = \sqrt{C}, \quad y(\sqrt{AC} + B) = \sqrt{A}, \tag{3}$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}.$$

Mais, des égalités (1), on tire

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2}, \quad A + C = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.$$

Donc

$$\frac{A}{y^2} = \frac{C}{x^2} = \frac{A + C}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2(x^2 + y^2)}.$$

Par suite,

$$A = \frac{y^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}, \quad C = \frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}. \tag{4}$$

De la première équation (3), combinée avec la relation

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2},$$

on déduit

$$\sqrt{AC} + B = \frac{\sqrt{C}}{x}, \quad \sqrt{AC} - B = \frac{x}{a^2b^2\sqrt{C}};$$

d'où, par addition,

$$2\sqrt{AC} = \frac{\sqrt{C}}{x} + \frac{x}{a^2b^2\sqrt{C}}.$$

Remplaçant A et C par les valeurs (4), on obtient

$$a^2b^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+a^2+b^2)^2 = 4x^2y^2(a^2+b^2)^3.$$

Le lieu demandé est donc une courbe du sixième ordre ; l'origine est un centre et un point isolé.

2° La corde de contact a pour équation

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 1;$$

la distance au centre, si l'on tient compte de (1), est

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A+C}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cette distance étant constante, la corde de contact enveloppe une circonférence concentrique à l'ellipse. Cette propriété est connue.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

561. Étant donnés un cercle O, de rayon r, et deux tangentes parallèles AA′, BB′, on décrit deux autres cercles O′, O″ qui se touchent mutuellement, qui touchent le cercle O et dont le premier est tangent à AA′, le second à BB′. Trouver la relation entre les rayons r, x, y des trois cercles.

Soient A′, B′ les points de contact des cercles O′, O″ avec les parallèles. On a

$$\overline{O'O''}^2 \text{ ou } (x+y)^2 = (2r-x-y)^2 + (AA' - BB')^2;$$

mais

$$AA' = 2\sqrt{rx}, \quad BB' = 2\sqrt{ry}; \quad \text{donc} \quad 2\sqrt{xy} = r.$$

562. Résoudre le système

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} 2y, \quad \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} 2x.$$

On trouve

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{1 + 2b^2 - 2ab \pm 2b\sqrt{1 + (a-b)^2}}.$$

Discussion.

563. Un nombre étant écrit dans le système de numération à base 13, indiquer les caractères de divisibilité par les nombres 3, 4, 7.

564. Trouver les formules générales résolvant l'équation

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)\, z^2. \tag{1}$$

En écrivant

$$(x + az)(x - az) = (bz + y)(bz - y),$$

on est conduit à poser

$$x + az = \frac{p}{q}(bz + y), \quad x - az = \frac{q}{p}(bz - y),$$

p et q étant deux indéterminées; d'où

$$x = 2bpq + a(p^2 - q^2), \quad y = 2apq + b(q^2 - p^2), \quad z = p^2 + q^2.$$

Autrement. Posons $x = az - p$, $y = bz - q$. En substituant dans (1), on trouve successivement

$$z = \frac{p^2 + q^2}{2(ap + bq)}, \quad x = \frac{2bpq + a(p^2 - q^2)}{2(ap + bq)}, \text{ etc.}$$

On peut ensuite négliger les dénominateurs.

565. On donne l'angle C d'un triangle ABC et la relation

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}.$$

Trouver A et B; discuter.

QUESTIONS PROPOSÉES.

837. On donne deux droites Ox, Oy et un point S. Une sécante menée par S rencontre Ox en M, Oy en M'. On construit le triangle SMP directement semblable au triangle SOM'. Le lieu de P est une conique ayant pour foyer S. (*Collège d'Aberystwyth*, Examens de 1892.)

838. Si N — 1 et N + 1 sont premiers, le nombre $2N^2 + 2$, somme de deux carrés, est aussi la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés, la somme de cinq carrés(*). (E. CATALAN.)

(*) Il y a exception pour N = 2.

×**839**. x étant un arc moindre que $\frac{1}{4}\pi$ démontrer par des considérations élémentaires que

$$\operatorname{tg} x - x < \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}. \qquad \text{(F. Giudice.)}$$

×**840**. Trouver les valeurs de y et z telles que les polynômes

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y, \quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

aient un facteur commun du second degré.

×**841**. Soient A′, B′, C′ les points où les symédianes d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite; soient V, W les centres isodynamiques. Démontrer que B′ et C′ sont les centres isodynamiques du triangle AVW, et que B, C sont les centres isodynamiques du triangle A′VW. (Sollertinsky.)

842. Trouver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(x \sin\theta)\, d\theta. \qquad \text{(Greenstreet.)}$$

×**843**. Sur les arêtes AD, BD, CD d'un tétraèdre ABCD, on prend trois longueurs égales $AA' = BB' = CC' = \lambda$. Trouver le lieu décrit par le point d'intersection des plans BCA′, CAB′, ABC′ lorsque λ varie.

844. Par le point de rebroussement O d'une cissoïde droite, on mène un rayon vecteur OA. Le cercle de diamètre OA rencontre la cissoïde en un autre point B. La corde AB rencontre la cissoïde en un troisième point C. Montrer que : 1° La corde AB enveloppe une parabole (P) quand le vecteur OA varie; 2° Les tangentes à la cissoïde en A et C se rencontrent sur une ellipse; 3° La perpendiculaire élevée en A à OA enveloppe la parabole (P). (E. N. Barisien).

845. Par deux points fixes D, E pris sur le côté AB du triangle de référence ABC, on mène des tangentes à une parabole quelconque inscrite à ce triangle. Trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes. (V. Retali.)

Rectification. Page 103, question 559, lire 4661, au lieu de 4761.

SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES;

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Soient α et α', β et β' les points d'intersection des axes principaux d'un système de coniques homofocales, avec deux droites conjuguées rectangulaires (*), dont l'une $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe M. Les ponctuelles décrites par les points α et α' sont perspectives, celles décrites par les points α et β, ou α' et β' sont involutives ; par conséquent les ponctuelles (β) et (β') sont projectives, et la droite $\beta\beta'$ enveloppe une conique. Cette courbe est d'ailleurs une parabole, car la droite conjuguée rectangulaire du diamètre OM est à l'infini. La droite $\beta\beta'$ est la polaire du point M par rapport à une conique du système homofocal ; la longueur de l'axe $\alpha\beta$ pour cette conique, est égale à $2\sqrt{OM'.O\beta}$, si M' est la projection du point M sur cet axe. Donc : *si une droite tourne autour d'un point fixe, la conjuguée rectangulaire enveloppe une parabole* (P). *Cette parabole est aussi l'enveloppe des polaires du point fixe par rapport au système de coniques homofocales* (Théorème connu).

2. Par le point M, menons les deux droites conjuguées rectangulaires MT et MN, elles sont tangentes aux deux coniques homofocales S_1 et S_2 passant par le point M. La parabole (P) peut être considérée comme l'enveloppe des perpendiculaires abaissées des points de la tangente MT sur leurs polaires respectives par rapport à la conique S_1. Cette parabole sera donc tangente à MN au centre de courbure μ_1 de la courbe S_1 au point M, et à la droite MT au pôle de MN par rapport à la conique S_1. Les mêmes considérations appliquées à la conique S_2 montrent que la parabole (P) est tangente à MT au centre de courbure μ_2 de la conique S_2 au point M, et à la droite MN au pôle de la droite MT, par rapport à la conique S_2. Par conséquent : *Lorsque deux coniques homofocales* S_1 *et* S_2 *se*

(*) Si d'un point P on mène les tangentes PQ, PQ' à une conique du système homofocal, les bissectrices de l'angle QPQ' et de son supplément adjacent sont des droites conjuguées rectangulaires par rapport à cette conique et à une conique quelconque du système ; elles divisent harmoniquement la distance FF' des foyers. Réciproquement, deux droites rectangulaires qui divisent harmoniquement FF' sont conjuguées par rapport à une conique quelconque du système homofocal.

coupent en M, *le centre de courbure de* S_1 *au point* M, *est le pôle par rapport à* S_2 *de la tangente menée à la conique* S_1 *au point* M (*).

3. On peut déterminer les points de contact de cette parabole avec les axes du système. Le point β sera un de ces points, si la droite $\beta\beta'$ coïncide avec un axe ; c'est-à-dire si $M\alpha$ est perpendiculaire à cet axe. *Les points de contact cherchés sont donc les conjugués, par rapport aux foyers, des projections du point* M *sur les axes.*

Connaissant les points de contact des axes avec la parabole (P), on peut déterminer le point de contact μ_1, de la droite MN avec la même courbe ; on arrive à la construction suivante : *Soient* M_1 *et* M_2 *les conjugués par rapport aux foyers des projections du point* M *sur les axes,* N_1 *et* N_1' *les points où la normale* MN *coupe les mêmes axes, les droites* M_1N_1' *et* M_2N_1 *se coupent sur le diamètre passant par le centre de courbure* μ_1.

4. Considérons deux droites quelconques l et l' se coupant au point M ; les pôles P, P_1, ..., et P_1, P_1', ... de ces deux droites par rapport au système homofocal, sont situés sur deux droites PP_1 et $P'P_1'$ respectivement perpendiculaires aux droites l et l', et tangentes à la parabole (P). Les droites PP', P_1P_1' ... sont les polaires du point M par rapport au système de coniques ; elles sont donc tangentes à la parabole (P) et les deux ponctuelles P, P_1, ... et P', P_1', ... sont semblables. Par conséquent : *Les pôles de deux droites par rapport à un système de coniques homofocales, décrivent deux ponctuelles semblables* (Théorème connu).

5. Soient N_1 et N_2, les points d'intersection des droites MN et MT avec l'un des axes ; les pôles de MT par rapport aux coniques S_1 et S_2, et par rapport aux foyers situés sur cet axe, sont M, μ_1, N_1. Ceux de la droite MN sont μ_2, M, N_2. D'après le théorème du N° 4, on a

$$\frac{MN_1}{M\mu_1} = \frac{\mu_2N_2}{\mu_2M_2} \quad \text{ou} \quad \frac{MN_1}{M\mu_1} + \frac{MN_2}{M\mu_2} = 1.$$

Donc : *Si en un point* M *commun à deux coniques homofocales,* N_1 *et* N_2 *sont les points d'intersection des normales avec l'un des axes,* μ_1 *et* μ_2 *les centres de courbure, on a*

$$\frac{MN_1}{M\mu_1} + \frac{MN_2}{M\mu_2} = 1. \qquad (a)$$

Soient ν_1 et ν_2 les milieux des segments interceptés par les axes, sur les

(*) SALMON, *Sections coniques*, p. 642.

deux normales MN_1 et MN_2; en ajoutant les égalités (a) relatives aux deux axes, on obtient

$$\frac{M\nu_1}{M\mu_1}+\frac{M\nu_2}{M\mu_2}=1.$$

6. Le diamètre OM est la directrice de la parabole (P); donc la perpendiculaire abaissée de M sur la droite $\mu_1\mu_2$, et la droite OM sont également inclinées sur la droite MN; par conséquent, si O_1 et O_2 sont les projections du centre O sur les normales $M\mu_1$ et $M\mu_2$, on a

$$\frac{OO_2}{M\mu_1}=\frac{OO_1}{M\mu_2}.$$

Les rayons de courbure en un point M *commun à deux coniques homofocales, sont liés par la relation* $OO_1 . M\mu_1 = OO_2 . M\mu_2$.

7. Soient a_1 et b_1, a_2 et b_2 les demi-axes des deux coniques S_1 et S_2; on a

$$M\mu_1=\frac{a_1^2b_1^2}{\overline{OO_1}^3},\quad M\mu_2=\frac{a_2^2b_2^2}{\overline{OO_2}^3};$$

d'où

$$\frac{M\mu_1}{M\mu_2}=\frac{a_1^2b_1^2}{a_2^2b_2^2}\cdot\frac{\overline{OO_2}^3}{\overline{OO_1}^3}=\frac{a_1^2b_1^2}{a_2^2b_2^2}\cdot\frac{\overline{M\mu_1}^3}{\overline{M\mu_2}^3},$$

donc

$$\frac{M\mu_1}{M\mu_2}=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}.$$

Les courbures en un point commun à deux coniques homofocales, sont proportionnelles aux rectangles des axes.

Note. La parabole considérée par M. Servais est la même que celle qui nous a servi à démontrer géométriquement un théorème de M. Mennesson (*Mathesis*, p. 77). Le lecteur trouvera quelques développements sur les coniques homofocales, complétant ceux de notre savant collègue de Gand, dans une Note de *Mathesis*, (1), 1, p. 147. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Les lieux géométriques en géométrie élémentaire, par M. P. Sauvage, professeur de mathématiques (Saint-Cyr) au lycée de Montpellier. Paris, Gauthier-Villas et fils, 1893. Un vol. in-8° de VII-13 pages. Prix : 3 francs.

L'auteur s'est proposé « de donner aux élèves des idées générales sur les lieux géométriques et de résumer en un petit nombre de méthodes simples, facilement

assimilables, les procédés auxquels la plûpart n'arrivent qu'après un temps assez long, par tâtonnements, un peu au hasard ».

L'ouvrage s'adresse à des lecteurs possédant toute la géométrie élémentaire, y compris les courbes usuelles.

Après quelques considérations sur ce qu'on appelle *condition* dans la détermination d'une figure géométrique, l'auteur examine les méthodes générales, réduites à cinq, pour la recherche des lieux géométriques plans; il passe ensuite en revue les lieux géométriques que l'on rencontre dans le cours, et ceux qui s'en déduisent immédiatement; puis développe quelques exemples ou indique certains autres comme application des méthodes générales; enfin, il montre l'usage des lieux géométriques dans les problèmes graphiques.

Le livre de M. Sauvage peut rendre des services aux élèves se préparant aux baccalauréats et aux écoles spéciales. Cependant, il nous a semblé qu'il servirait plutôt à résumer ou à coordonner des connaissances déjà acquises qu'à en faire acquérir beaucoup de nouvelles. (J. N.)

Mathématiques et Mathématiciens. *Pensées et curiosités, recueillies par* A. Rebière. Deuxième édition revue et augmentée. Paris, Nony (II-566 p. in-8°). Prix : 5 francs.

Un compte rendu de la première édition a paru dans *Mathesis*, 1889, IX, pp. 159-160, et, sous une forme plus détaillée, dans la *Revue des questions scientifiques* (juillet 1889). Tout en émettant quelques critiques de détails, il proclamait l'ouvrage curieux et intéressant.

La seconde édition contient le double de matière. L'auteur a revu son livre avec beaucoup de soin (*) et y a apporté des améliorations notables. Presque toutes les inexactitudes signalées dans les comptes rendus cités plus haut ont disparu et beaucoup de bons extraits nouveaux ont été introduits.

La première partie (175 pages) est formée de morceaux choisis sur les principes, les méthodes, la philosophie, l'enseignement et l'histoire des Mathématiques; ils sont tirés des philosophes, des historiens et surtout des mathématiciens de tous les temps. Il y a là un recueil de pensées fines ou profondes très suggestives, en même temps qu'un grand nombre d'autres où les littérateurs et les philosophes contemporains déraisonnent à plaisir à propos de mathématiques (**).

(*) Cependant, certains passages pourraient être supprimés, par exemple le refrain relatif à Sturm et Gerono (p. 329). Dans la liste des membres de l'Institut, Pasteur est oublié.

La liste des Mathématiciens vivants (p. 329) laisse beaucoup à désirer. Pour la Belgique, on aurait dû mentionner MM. Folie, De Tilly, Le Paige, C. Lagrange, Massau, Graindorge, J. Deruyts, etc.; pour la Hollande, MM. Bierens de Haan, Schoute, Kapteyn, etc. M. Rebière continue à dire que le P. Verbiest, le célèbre missionnaire en Chine au 17^{me} siècle, est français, tandis qu'il est belge.

(**) En particulier, aucun ne semble se douter de l'existence de la métagéométrie comme science distincte de la géométrie physique.

Dans la seconde partie (290 pages), nous voyons d'abord la science et les savants à un point de vue familier, biographique et anecdotique; l'auteur nous donne ensuite des paradoxes qui piquent la curiosité et où se trouve souvent un grain de sagesse.

Un bon choix de problèmes « plaisants et délectables » (64 pages) termine l'ouvrage.

La lecture de ces « Mélanges sur les alentours des Mathématiques » est à la fois instructive et amusante; sa place est marquée dans toutes les bibliothèques, car tout le monde peut en tirer parti. Le lecteur ne se fiera, bien entendu, qu'aux mathématiciens proprement dits quand il s'agit de questions de principes, ou d'histoire de la science.

H. Vuibert. **Annuaire de la jeunesse.** Année 1892. Paris, Nony (967 pages in-12). Prix : 3 francs.

Recueil extrêmement bien fait « où sont énumérés tous les établissements d'instruction, toutes les écoles du gouvernement, toutes les écoles libres, avec les diplômes, certificats et brevets qu'elles confèrent, avec les carrières dont elles ouvrent l'entrée et les concours où elles aboutissent » (F. Sarcey). Les professeurs belges y trouveront, en particulier, les programmes français d'enseignement. La comparaison avec les nôtres est très instructive et parfois assez humiliante.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques, publié par la commission permanente du répertoire. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893 (XIV-80 p. in-8°).

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen. Naar den franschen tekst bewerkt. Amsterdam, Verluys. 1892 (VIII-108 p. in-8°).

Le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques, réuni à Paris du 16 au 19 juillet 1889, a adopté un certain nombre de résolutions dont les principales sont les suivantes :

1° Il y a lieu de publier un répertoire contenant les titres des écrits mathématiques originaux publiés de 1800 à 1889 inclusivement et des travaux relatifs à l'histoire des Mathématiques de 1600 à 1889 inclusivement; puis des suppléments décennaux à ce répertoire.

2° Ces écrits seront répartis d'après leur objet, *indépendamment des méthodes*, en *classes* désignées par une lettre capitale; les classes seront subdivisées en *sous-classes* désignées par la lettre capitale de la classe affectée d'un exposant; les classes et les sous-classes seront partagées en *divisions* désignées par un chiffre arabe; les divisions en *sections* désignées par une minuscule latine; les sections en *sous-sections* représentées par une minuscule grecque. La notation relative à un écrit mathématique sera notée dans un encadrement rectangulaire. Ainsi

$L^{4}b_{\alpha}$

est la notation qui désigne un mémoire traitant des propriétés du lieu géométrique d'un angle droit circonscrit à une conique. En effet L signifie *coniques et quadriques;* L¹, *coniques*, L¹4, *tangentes aux coniques;* L¹4b, *tangentes aux coniques faisant un angle donné;* la sous section α traite du cas où l'angle est *droit*.

3° Les auteurs ou éditeurs d'écrits mathématiques originaux sont priés d'accompagner le titre de ces écrits de la notation symbolique qui indique leur place dans la classification du répertoire.

La commission du Répertoire a pour président M. H. Poincaré, de l'Institut, pour secrétaire M. d'Ocagne (rue de Vienne, 5, Paris).

L'index du Répertoire dont nous annonçons la publication permet à tous les travailleurs de répondre au vœu du congrès résumé plus haut sous le n° 3. Cet index, sous une apparence aride, contient un grand nombre de renseignements précieux; il porte partout l'empreinte du puissant géomètre qui est le président de la commission du répertoire.

Le texte actuel de l'index est en réalité une seconde édition, plus complète que celle qui a été publiée, en 1889, à l'imprimerie nationale de France. La traduction hollandaise est faite, d'après cette ancienne édition, par la société mathématique d'Amsterdam. Elle contient de plus que les deux éditions françaises, une table alphabétique des matières très bien faite qui facilitera beaucoup les recherches dans l'index actuel et dans le répertoire futur. Pareille table devrait être ajoutée à l'édition française.

Nous essayerons peut-être de classer désormais un certain nombre d'articles de *Mathesis*, d'après le système du Répertoire, comme le font déjà quelques autres journaux moins élémentaires que le nôtre. (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

×8. *Sur les premières propositions concernant le plan* (Lettre de M. J. Delbœuf) « On vient seulement de me communiquer le n° de février de *Mathesis* qui contient une réponse à la question posée par moi : *Démontrer que deux plans ne peuvent pas n'avoir qu'un point de commun.*

« Cette réponse est tirée de la *Géométrie* de Rouché et de Combérousse. Mais elle ne vaut rien. Elle renferme un cercle vicieux. On y suppose démontré ce qui est à démontrer, plus encore autre chose. En effet, si deux plans P et Q n'ont qu'un point de commun A, ils sont tangents en ce point comme peuvent l'être deux surfaces sphériques se touchant soit extérieurement soit intérieurement, ou encore ils sont comme deux surfaces coniques ayant même sommet.

Dans l'un comme dans l'autre cas, toute droite passant par A et

restant dans le plan Q *ne percera pas* le plan P. Or c'est précisément le contraire qu'admettent les auteurs cités au début de leur démonstration : « Supposons, disent-ils, que les droites LAL', NAN', coupent l'une et l'autre le plan P. » Le cercle vicieux est flagrant.

Ils admettent encore que si une droite a deux de ses points de l'un et de l'autre côté d'un plan, cette droite coupe ce plan. Ce serait à démontrer.

En effet, il est bien dit en note de *Mathesis* que la démonstration de Rouché et de Comberousse suppose démontré que *deux droites qui ont un point de commun, se traversent réciproquement*, mais c'est insuffisant. Car il faut démontrer aussi que *deux plans qui ont une droite de commune se traversent réciproquement*, et ne sont pas comme deux surfaces cylindriques ou coniques qui ont une génératrice commune (Mai 1893) (*). »

Rappelons, à propos de la lettre précédente, que M. Delbœuf a publié, dès 1860, un ouvrage étendu intitulé : *Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats, suivis de la traduction d'une dissertation sur les principes de la géométrie* par Fr. Ueberweg (Paris, Ladrange; Liége, Desoer, XXI-308 pages in 8°), où il agite, sous une forme originale, la plupart des questions qui touchent aux principes de la géométrie euclidienne. Pour apprécier la valeur de ce livre, maintenant souvent cité dans les Revues philosophiques (**), il importe de remarquer qu'il est antérieur à la publication des Mémoires de Riemann, de Beltrami, de Helmholtz, de Schering, de Cayley et de Klein sur les géométries non euclidiennes.

C'est aussi en 1860 que M. de Tilly a publié son premier essai sur le même sujet sous le titre : *Recherches sur les éléments de la géométrie* (Bruxelles, Bruylant-Christophe et C^ie^; Paris, Tanera; 120 pages in-8°). Cet opuscule, qui ne représente d'ailleurs plus que partiellement les idées de l'auteur sur la question si difficile des principes de la science de

---

(*) Nous persistons à croire que les principes rappelés en note, dans l'article cité de *Mathesis*, p. 47, suffisent pour établir tous les points admis par MM. Rouché et de Comberousse, dans leur démonstration. (P. M.)

(**) Voir, par exemple, un article de M. Couturat dans la *Revue de Metaphysique et de Morale* (mai 1893).

l'espace, est aussi un travail original qu'il est utile de signaler à ceux qui s'occupent de l'histoire de la géométrie au 19e siècle. (P. M.)

9. *Une propriété des quadriques homofocales.* Soit

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1$$

l'équation d'un système de quadriques homofocales. Par tout point M (x, y, z), il passe trois de ces surfaces; les valeurs correspondantes de λ^2, que nous désignons par λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2 sont données par l'équation

$$\lambda^6-\lambda^4(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)+\lambda^2(\Sigma b^2c^2-\Sigma x^2)(b^2+c^2)$$
$$-a^2b^2c^2+\Sigma b^2c^2x^2=0.$$

On a donc

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2),$$

égalité qu'on peut écrire ainsi :

$$\sum_{1,2,3}[x^2+y^2+z^2-(a^2-\lambda_i^2)-(b^2-\lambda_i^2)-(c^2-\lambda_i^2)]=0.$$

La quantité entre crochets est la puissance de M par rapport à la sphère qui a pour centre l'origine des coordonnées et dont le carré du rayon est égale à la somme des carrés des demi-axes de l'une des quadriques du système homofocal passant par M. Cette sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les trois faces touchent la quadrique, est appelée *sphère de Monge* ou *sphère orthogone.* On peut donc énoncer le théorème suivant, que M. Servais a obtenu récemment comme conséquence de certaines formules qui lui sont propres :

La somme des puissances d'un point par rapport aux sphères orthogones de trois quadriques homofocales passant par ce point, est nulle. (J. N.).

×10. *Sur la construction d'une moyenne proportionnelle.* La construction rappelée par MM. Catalan et Lemoine (*Mathesis*, (2), II, pp. 250 et 275; (2), III, p. 32) et que l'on rencontre déjà dans une lettre de Thomas Strode à Wallis, datée du 3 novembre 1684 (Voir *Mathesis*, p. 47), a été indiquée également en 1842 par M. le professeur Kunze de Weimar dans les *Archives de Grunert*, t. II, p. 328 et introduite par lui dans son traité de géométrie.

Nous devons cette communication à l'obligeance de M. Uhlich, professeur à Grimma (royaume de Saxe).

×11. *Note sur la question* 807. En proposant la belle identité due à

M. Baschwitz, j'ai oublié de faire observer qu'elle contient la transformée de la série de Lambert :

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}+\cdots=\frac{1+x}{1-x^2}+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\frac{1+x^3}{1-x^3}x^9+\cdots,$$

trouvée par CLAUSEN(*). (E. CATALAN.)

×12. *Théorème d'arithmétique.* M. Bachwitz a communiqué récemment à M. Catalan le théorème suivant :

Tout nombre entier qui est une somme de trois carrés, peut se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés fractionnaires.

Cette proposition peut se déduire de l'identité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=$$
$$(aa'+bb'+cc')^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'+a'b)^2.$$

En effet, soit $a^2+b^2+c^2$ le nombre donné. Prenons pour a', b', c' une solution de l'équation indéterminée $a'^2+b'^2+c'^2=x^2$; l'identité(**)

$$(m^2+n^2+p^2)^2=(m^2+n^2-p^2)^2+(2mp)^2+(2np)^2$$

montre qu'on peut poser

$$a'=m^2+n^2-p^2,\quad b'=2mp,\quad c'=2np,\quad x=m^2+n^2+p^2,$$

où m, n, p sont trois nombres entiers quelconques. Nous aurons

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2+\left(\frac{\beta}{x}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{x}\right)^2+\left(\frac{\delta}{x}\right)^2,$$

où

$$\alpha=a(m^2+n^2-p^2)+2bmp+2cnp,$$
$$\beta=2p(bn-cm),$$
$$\gamma=c(m^2+n^2-p^2)-2anp,$$
$$\delta=2amp-b(m^2+n^2-p^2),$$
$$x=m^2+n^2+p^2.$$ (J. N.)

×13. *Un nouveau quadrateur.* Nous recevons, de Rio de Janeiro, une brochure publiée par le Dr Castro Lopez et portant le titre : *La quadrature du cercle*, avec le motif *Tandem!...* M. Lopez, qui a déjà publié plus d'une trentaine d'ouvrages sur les sujets les plus variés (sur la langue latine, l'homéopathie, la musique, l'agriculture, etc.; neuf pièces de

(*) JACOBI, *Fundamenta nova*, p. 187.

(**) Voir dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1874, p. 521, un article de M. Catalan ; voir aussi *Nouvelle Correspondance*, t. I, p. 169.

théâtre, des poésies, etc.) trouve pour π le nombre commensurable 3,145. Sa brochure ne se prêtant à aucune analyse, nous nous contentons de communiquer à nos lecteurs les lignes suivantes qui servent de préambule :

« Un fou de plus! ... vont s'écrier les faux savants; mais ce fou, ce qu'il regrette, c'est de ne pas trouver de termes assez expressifs pour témoigner tout le mépris qu'il voue à ceux qui pousseront une telle exclamation ».

Pour les détails sur quelques devanciers de M. Lopez, nous renvoyons à un intéressant article de M. Catalan dans la *Nouvelle Correspondance*, t. IV., p. 53. Suivant une remarque d'Arago, la *Quadrature du cercle* est une maladie qui sévit, surtout, au printemps.

Faut-il ajouter qu'elle franchit aussi les mers?

×**14.** *Volume et centre de gravité du prismatoïde* (d'après M. Fretille, J. M. S. 1892, pp. 132-136). Le prismatoïde, dont nous avons donné le volume d'après MM. Halsted et Latars (*Mathesis*, 1885, t. V, pp. 9-10, 74-75) est le polyèdre compris entre deux bases situées dans deux plans parallèles et des faces latérales, triangles ou trapèzes, qui s'appuient à la fois sur les deux bases, ou plutôt des triangles seulement puisque l'on peut diviser les trapèzes en triangles. Considérons une partie du prismatoïde composée d'une pyramide mMNP ayant son sommet m dans la base supérieure, sa base étant le triangle MNP situé dans la base inférieure; d'une pyramide mpNP, dont le sommet est m, et la base un des triangles latéraux (ce triangle a son sommet p dans la base supérieure, sa base NP, dans la base inférieure); enfin d'une pyramide mnpN dont le sommet est en N, la base étant mnp situé dans la base supérieure du prismatoïde; np est une parallèle à NP, qui se réduit à un point si le trapèze NPpn se réduit à un triangle.

Le volume de mMNP est égal à

$$\frac{H}{3}\cdot \mathrm{MNP} = \frac{H}{6}(\mathrm{MNP} + 4\,\mu\nu'\pi') \qquad (1)$$

H étant la hauteur du prismatoïde, $\mu\nu'\pi'$ la section à mi-hauteur de mMNP par un plan parallèle à la base (on suppose ν' sur mP, π' sur mN). Le volume de Nmnp est de même

$$\frac{H}{3}\cdot mnp = \frac{H}{6}(mnp + 4\,\mu'\nu\pi') \qquad (2)$$

$\mu'\nu\pi'$ étant la section à mi-hauteur de Nmnp par un plan parallèle à la base (on suppose μ' sur pN). La pyramide mNPp est coupée par ce plan parallèle suivant un parallélogramme $\pi\mu'\nu'\pi'$, tel que l'on a pour le volume de cette pyramide

$$\frac{H}{6}(4\pi\mu'\nu'\pi'). \qquad (3)$$

En ajoutant tous les résultats semblables, on trouve la formule connue pour le volume du prismatoïde :

$$V = \frac{H}{6}(B + b + 4\beta),$$

B étant la base inférieure du prismatoïde, b la base supérieure, β la section médiane.

Le centre de gravité de la pyramide (1) est à mi-distance des centres de gravité des triangles MNP et $\mu\nu'\pi'$; celui de la pyramide (2) est aussi à mi-distance des centres de gravité des triangles mnp, $\nu\mu'\pi'$; celui de la pyramide (3) se trouve au centre de gravité du parallélogramme $\pi\mu'\nu'\pi'$. On déduit aisément de là que le centre de gravité du prismatoïde est le point d'application de trois forces parallèles appliquées aux centres de gravité de B, b et β et proportionnelles respectivement à B, b et 4β.

×15. *Une curieuse coïncidence.* Un corps pesant tombant librement, dans le vide, à Paris, parcourt, pendant la première seconde centésimale (la cent millième partie du jour solaire moyen)

365 centimètres, 5 millimètres, 48 centièmes.

La durée de l'année tropique moyenne est

365 jours, 5 heures, 48 minutes

en laissant de côté les secondes. Cette curieuse coïncidence, qui vient de nous être signalée par M. Mister, a sa place marquée dans la future édition du livre de M. Rebière : *Mathématiques et Mathématiciens.*

Concours de l'École Polytechnique de Paris en 1893.

QUESTIONS PROPOSÉES LE 29 MAI.

I. Étant donnés un plan et deux sphères S, S' de rayons R et R', ayant leurs centres dans ce plan, on considère une sphère variable Σ, tangente aux deux premières et au plan. On demande :

1° Le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné.

2° le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.

II. On donne deux sphères de centres C, C′ et un cône de révolution de sommet O, dont l'axe est perpendiculaire au plan COC′; le triangle COC′ est rectangle en O. On demande :

1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données;

2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle COC′ devient isoscèle, où les sphères données sont égales et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 732.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240 et III, p. 120.)

Quelles sont les courbes dont le cercle de courbure passe par un point fixe? (MANDART.)

Solution par M. GOB. La solution donnée dans le dernier numéro est trop générale. L'équation

$$\sqrt{r^2+r'^2}=-2\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

exprime que la normale polaire est double du rayon de courbure, mais dirigée en sens contraire(*). Par suite, l'équation

$$r^3=\frac{a}{\cos 3\vartheta}$$

(*) Par suite, elle ne répond pas à la question proposée, mais la question : trouver la courbe telle que $2\rho=N$. Celle-ci conduit à l'équation $\pm 2\frac{ds}{d\alpha}=\frac{ds}{d\theta}$, α étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire. Si s, θ, α varient dans le même sens, on prend le signe +, ce qui donne $d\alpha=2d\theta$; d'ailleurs $d\alpha=d\theta+du$, u étant l'angle du rayon vecteur avec la tangente; par suite, $du=d\theta$, ou $\theta=u+C$, ce qui conduit à l'équation du cercle. Si α varie en sens inverse de s et θ, il faut prendre le signe −, ce qui donne $du=-3d\theta$, etc. Cette remarque nous a été communiquée par M. Mister. Comparez *Mathesis*, (1), II, 102, 164 où M. Brocard s'occupe de questions analogues. (P. M.)

représente une courbe telle que le symétrique du cercle de courbure par rapport à la tangente passe par un point fixe. Au surplus, cette courbe est composée de trois branches hyperboliques dont la *convexité* est tournée vers le pôle.

Voici une solution géométrique de la question. Désignons par γ une courbe dont tous les cercles de courbure passent par un point fixe O ; par γ' sa transformée par rayons vecteurs réciproques, le pôle de la transformation étant placé en O. Tous les cercles osculateurs de γ passant par O, tout point de γ' sera un point d'inflexion(*), ce qui est impossible à moins que γ' ne soit une droite. Donc il n'existe pas d'autre courbe que le cercle, jouissant de la propriété que tous ses cercles osculateurs passent par un point fixe.

La question de M. Mandart peut se rattacher à la proposition suivante : *Les cercles osculateurs à une courbe γ n'ont pas d'autre enveloppe que cette courbe elle-même.*

Ce théorème est presque évident. Pour le démontrer, soient ω, ω' les centres de courbure en deux points infiniment voisins de γ ; soient A un point de rencontre des deux cercles de courbure, B la projection de A sur la droite $\omega\omega'$, ρ et ρ' les rayons de courbure. On a, en désignant par d la distance $\omega\omega'$ et en supposant $\rho > \rho'$,

$$\rho^2 = \rho'^2 + d^2 + 2d.\omega'B;$$

d'où

$$\omega'B = \frac{\rho'^2 - \rho^2 + d^2}{2d} = (\rho' + \rho)\frac{\rho' - \rho}{2d} + \frac{d}{2}.$$

Comme $\rho' - \rho$ est égal à l'arc $\omega\omega'$ de la développée, $\lim \frac{\rho' - \rho}{d} = 1$; par suite, en passant à la limite, on trouve $\omega B = \rho$. On en conclut que lorsque ω' tend vers ω le point d'intersection des deux cercles a pour limite le point d'osculation du cercle ω ; ce point appartient donc à l'enveloppe.

Remarques. I. L'inversion peut servir à démontrer des théorèmes analogues au précédent. Par exemple, *il n'existe pas de courbe* (en dehors

(*) Dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, un cercle osculateur se change généralement en un cercle osculateur de la transformée ; s'il passe par le pôle, il se change en une droite osculatrice, c'est-à-dire en une tangente d'inflexion.

de la circonférence) *dont les cercles osculateurs coupent orthogonalement un cercle fixe* C. Car si l'on prend pour pôle d'inversion un point du cercle fixe C, celui-ci se transforme en une droite c qui coupe orthogonalement les cercles osculateurs de la transformée de la courbe donnée; cette transformée aurait donc pour développée la droite c.

II. De même, *les cercles osculateurs d'une courbe* γ *ne peuvent couper sous un angle constant* λ *un cercle fixe* C. En effet, si l'on prend pour pôle d'inversion un point de C, les cercles osculateurs de γ ont pour inverses les cercles osculateurs de la transformée γ' de γ; ces derniers cercles couperaient donc sous l'angle λ la droite c, inverse de C. On démontre facilement que ceci est impossible. Car, soient ω et ω' les centres de courbure en deux points de γ' infiniment rapprochés, β et β' leurs projections sur c, α et α' les points où les cercles de courbure ω, ω' rencontrent c; l'arc $\omega\omega'$ de la développée de γ' étant égal à la différence des rayons de courbure $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$, et les angles de $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$ avec c étant égaux à $\frac{1}{2}\pi - \lambda$, on a

$$\lim \frac{\omega\omega'}{\omega\alpha - \omega'\alpha'} = 1, \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\omega\omega' \cos\lambda}{(\omega\beta - \omega'\beta')} = 1;$$

il en résulte

$$\cos\lambda = \lim \frac{\omega\beta - \omega'\beta'}{\omega\omega'} = \cos t\omega\beta,$$

ωt étant la tangente au point ω de la développée de γ'. Donc toutes les tangentes de cette développée seraient parallèles entre elles.

×Question 793.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 263.)

Étant donné un triangle ABC, *soient* AI, BI, CI *les bissectrices intérieures. Soient* B_a, C_a *les projections de* B, C *sur* AI; C_b, A_b *celles de* C, A *sur* BI; A_c, B_c *celles de* A *et* B *sur* CL. *Démontrer :* 1° *que les droites* A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b *forment un triangle ayant pour sommets les milieux des côtés de* ABC; 2° *que les droites* B_cC_b, C_aA_c, A_bB_a *forment un triangle ayant pour sommets les points de contact de* BC, CA *et* AB *avec le cercle inscrit.* (MANDART.)

Solution par M. P. DELVILLE. 1° La droite A_bA_c passe par les milieux des côtés AB et AC; car le quadrilatère $AA_b IA_c$ étant inscriptible, l'angle

$$IA_bA_c = IAA_c.$$

Or

$$IAA_c = CAA_c - CAI = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}B,$$

donc

$$IA_bA_c = \tfrac{1}{2}B.$$

Soient M, N les points où A_bA_c coupe AB, AC. L'angle IBM vaut aussi $\frac{1}{2}B$, donc le triangle BMA_b est isoscèle, et $BM = MA_b$. De même, $AM = MA_b$, donc M est le point milieu de AB. On démontre de même que N est le milieu de AC.

2° La droite $B_c C_b$ passe par les projections D, E de I sur AB, AC. Menons B_cD; il nous faut démontrer que les angles BB_cD et BB_cC_b sont supplémentaires.

Si, sur BI comme diamètre, je décris une demi-circonférence, elle passe par B_c et par D ; on a donc

$$BB_cD = BID = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B. \qquad (1)$$

Si sur CB comme diamètre, je décris une demi-circonférence, elle passe par C_b et par B_c; le quadrilatère BB_cC_bC est donc inscriptible et l'on a

$$BB_cC_b = 180^\circ - BCC_b.$$

Or

$$BCC_b = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B;$$

donc

$$BB_cC_b = 90^\circ + \tfrac{1}{2}B. \qquad (2)$$

Ajoutant (1) et (2), on a

$$BB_cD + BB_cC_b = 180^\circ,$$

les trois points C_b, B_c et D sont donc en ligne droite. Il en est de même de E, C_b, B_c : donc etc.

Ont résolu la même question MM. François (La Haye), Bellens (Anvers), Catania, Decamps, Jeřabek, Delahaye, Droz-Farny, Labenne, Soons, Listray et Déprez.

M. Déprez accompagne sa solution des remarques suivantes :

1° Si A'_b, A'_c sont les projections de A sur les bissectrices extérieures des angles ABC, ACB, les points A_b, A_c, A'_b, A'_c sont en ligne droite avec les milieux des côtés AB, AC; 2° le triangle formé par les droites $B'_cC'_b$, $C'_aA'_c$, $A'_bB'_a$ a mêmes sommets que le triangle formé par les cordes de contact des angles A, B, C avec les cercles exinscrits correspondants.

M. Déprez examine aussi la figure analogue sur la sphère.

×Question 804.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 31.)

Quelle que soit la base du système de numération, aucun des nombres représentés par 10101, 101010101, 1010101010101... ***n'est premier.***

(E. CATALAN.)

Solution par MM. C. BERGMANS, A. BOUTIN, DROZ-FARNY, SOONS, LISTRAY, FAUQUEMBERGUE, P. DELVILLE ***et par*** UN ABONNÉ. — a étant la base du système, le nombre le plus général ayant la forme indiquée sera :

$$N = 1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{4n} = \frac{a^{4n+2} - 1}{a^2 - 1}.$$

On a donc

$$N = \frac{a^{2n+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^{2n+1} + 1}{a + 1}$$

$$= (1 + a + a^2 + \cdots + a^{2n})(1 - a + a^2 \cdots - a^{2n-1} + a^{2n}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Si b est le dernier chiffre significatif, en sorte que $b = a - 1$, les décompositions des nombres considérés sont :

$$111 \times b1, \quad 11111 \times b0b1, \quad 1111111 \times b0b0b1, \text{ etc.}$$

Question 819.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 78.)

Étant donnés un cercle O ***et un point*** A ***sur la circonférence, on mène une corde quelconque*** AB, ***que l'on prolonge de*** BL = AB ;

1° ***Trouver l'enveloppe de la circonférence*** M ***décrite sur*** BL ***comme diamètre.*** 2° ***Donner une construction géométrique des points*** P, R ***où la circonférence*** M ***touche son enveloppe.*** 3° ***Chercher le lieu du point de rencontre*** N ***des tangentes menées en ces points*** P, R. 4° ***Déterminer l'enveloppe de la ligne*** MN. 5° ***Trouver l'enveloppe de l'axe radical de la circonférence*** M ***avec celle que décrit son centre.*** (H. MANDART.)

Solution par M. GOB, ***professeur à l'athénée de Hasselt.*** Prenons pour axes le diamètre et la tangente en A. Désignons par R le rayon OA et par θ l'angle MAO. On aura :

$$AB = 2R\cos\theta, \quad AM = 3R\cos\theta.$$

Les coordonnées du point M seront donc :

$$x = 3R\cos^2\theta, \quad y = 3R\sin\theta\cos\theta ;$$

le rayon

$$BM = \frac{AB}{2} = R\cos\theta,$$

et l'équation du cercle M sera :

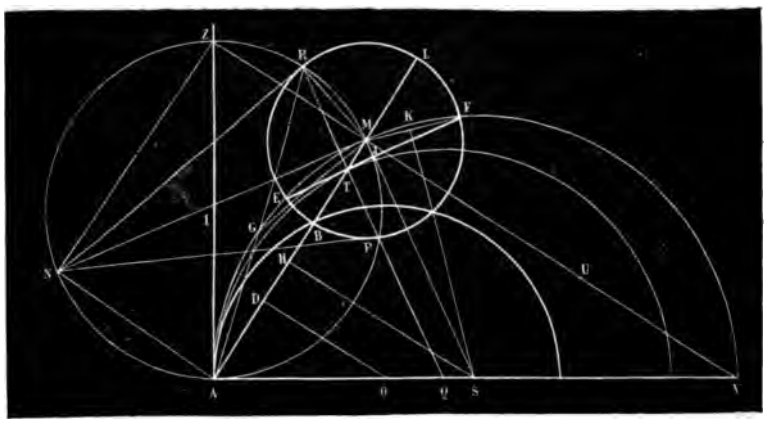
$$x^2 + y^2 - 6Rx\cos^2\theta - 6Ry\sin\theta\cos\theta + 8R^2\cos^2\theta = 0, \qquad (1)$$

ou

$$x^2 + y^2 - 3Rx + 4R^2 = (3Rx - 4R^2)\cos 2\theta + 3Ry\sin 2\theta. \qquad (2)$$

Dérivons cette équation par rapport à θ :

$$0 = -(3Rx - 4R^2)\sin 2\theta + 3Ry\cos 2\theta. \qquad (3)$$



Élevons les équations (2), (3) au carré et ajoutons-les membre à membre ; il vient

$$(x^2 + y^2 - 3Rx + 4R^2)^2 = (3Rx - 4R^2)^2 + 9R^2y^2$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R(x^2 + y^2)(3x - 4R) = 9R^2y^2,$$

ou encore,

$$(x^2 + y^2 - 3Rx)^2 = R^2(x^2 + y^2).$$

En passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$\rho^2 - 3R\rho\cos\omega = \pm R\rho, \text{ ou } \rho = 3R\cos\omega \pm R,$$

équation d'un limaçon de Pascal. Le cercle directeur a pour rayon $\frac{1}{2}R$ et le point double est en A.

2° L'équation (3) représente une droite passant par les points de contact du cercle M avec son enveloppe. Cette droite passe par le point fixe $x = \frac{1}{3}R$, $y = 0$. De plus son coefficient angulaire est tg 2θ; donc elle est perpendiculaire à la tangente menée par B au cercle O. D'où la construction :

Du point Q, *situé sur* AO *à une distance de* A *égale à* $\frac{1}{3}$ AO, *abaissons une perpendiculaire sur la tangente en* A *au cercle* O. *Cette droite rencontrera le cercle* M *aux points de contact* P, R.

3° Soient x_1, y_1 les coordonnées de N; l'équation de la polaire de ce point par rapport au cercle M sera

$$xx_1 + yy_1 - 3R(x+x_1)\cos^2\theta - 3R(y+y_1)\sin\theta\cos\theta + 8R^2\cos^2\theta = 0.$$

Identifions-là avec l'équation (3). Il viendra

$$\frac{x_1 - 3R\cos^2\theta}{6\sin\theta\cos\theta} = \frac{y_1 - 3R\sin\theta\cos\theta}{3(\sin^2\theta - \cos^2\theta)} = \frac{3x_1\cos^2\theta + 3y_1\sin\theta\cos\theta - 8R\cos^2\theta}{8\sin\theta\cos\theta}.$$

Désignons par K chacun de ces rapports; les deux premiers donneront :

$$x_1 = 3R\cos^2\theta + 6K\sin\theta\cos\theta, \quad y_1 = 3R\sin\theta\cos\theta + 3K(\sin^2\theta - \cos^2\theta).$$

Substituons ces valeurs dans le 3° rapport; nous aurons après réductions,

$$K = -R\operatorname{cotg}\theta,$$

d'où

$$x_1 = -3R\cos^2\theta, \quad y_1 = 3R\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}.$$

Éliminons θ et nous aurons :

$$-x_1(x_1^2 + y_1^2) = 3Ry_1^2, \quad \text{ou} \quad y_1^2 = -\frac{x_1^3}{3R + x_1},$$

équation d'une cissoïde dont l'asymptote a pour équation $x = -3R$.

4° Connaissant les coordonnées des points M, N, on trouve, pour l'équation de la droite MN,

$$y\sin 2\theta + x\cos 2\theta - 3R\cos^2\theta = 0,$$

ou

$$\left(x - \frac{3R}{2}\right)\cos 2\theta + y\sin 2\theta = \frac{3R}{2}.$$

équation d'une droite dont la distance au point $(\frac{3}{2}R, O)$ est égale à $\frac{3}{2}R$.

On en conclut que l'enveloppe est le cercle S, dont le centre a pour

coordonnées $x = \frac{5}{2}R$, $y = 0$ et dont le rayon est égal à $\frac{5}{3}R$. Ce cercle est donc le lieu géométrique du point M.

5° Le cercle S ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 3Rx = 0,$$

l'axe radical des cercles M et S est représenté par

$$3Rx - 3Rx + 4R^2 = (3Rx - 4R^2)\cos 2\theta + 3Ry \sin 2\theta,$$

ou

$$\left(x - \frac{4}{3}R\right)\cos 2\theta + y \sin 2\theta = \frac{4}{3}R;$$

on voit que la distance de cet axe au point $(\frac{4}{3}R, 0)$, c'est-à-dire au point Q, est égale à $\frac{4}{3}R$. L'enveloppe est donc le cercle décrit de Q comme centre avec QA comme rayon.

Solution géométrique. 1° et 2°. Soit T le conjugué harmonique de A par rapport à BL. On aura

$$BT = \frac{AB}{3}, \quad AT = \frac{4AB}{3}.$$

Menons par T une parallèle à BO ; elle coupera AO en un point Q tel, que

$$AQ = \frac{4AO}{3},$$

et le triangle AQT sera isoscèle. La circonférence décrite de Q comme centre avec QA comme rayon, passera donc par T et divisera harmoniquement le diamètre BL; elle sera donc orthogonale au cercle M. Les cercles M sont donc de puissance constante, égale à $\overline{QA}^2$, par rapport au point Q. Il résulte de là que l'axe radical de deux quelconques de ces cercles passe par Q. Par conséquent, la droite joignant les points d'intersection P, R de deux cercles M, infiniment rapprochés, passe par Q. On retrouve donc la construction donnée plus haut pour les points P, R.

Soit I le point de rencontre des tangentes en A et en M au cercle S, lieu géométrique du point M. On a $QP.\ QR = \overline{QA}^2$; donc la circonférence décrite de I comme centre avec IA comme rayon passe par P, M, R ; ce qui donne une seconde construction des points P, R.

Soient G le point de rencontre de la droite AR avec le cercle S, D la la projection de O sur AB. Le triangle RMG est rectangle et égal au triangle ADO. En effet, les angles MRG et MAO ont même mesure dans

le cercle I; les angles MGR et IAB ont même mesure dans le cercle S, et l'on a MR = AD. On en conclut que RG = AO; par suite, le lieu de R est un limaçon de Pascal dont le cercle directeur est le cercle S.

3° La droite MN étant perpendiculaire à QP, le sera aussi à MS et sera, par suite, tangente au cercle S.

4° Le cercle I passant par M, P, R passera aussi par N; le point N s'obtient donc en prolongeant la tangente MI au cercle S d'une longueur IN = IA. Je dis que le lieu de N est une cissoïde. En effet, portons sur AI une longueur IZ = IA. La figure ANZM sera un rectangle et ZM passera par l'extrémité V du diamètre OA du cercle S. Si l'on porte sur VZ une longueur VU égale à AN, on aura VU = MZ; par conséquent, le lieu de U est une cissoïde dont le cercle générateur est le cercle S. Le lieu de N s'obtiendra donc en transportant cette cissoïde parallèlement à AO d'une longueur égale à 3AO.

5° Soit EF l'axe radical des cercles M et S; je dis que EF passe par T. En effet, désignons provisoirement par X le point de rencontre de EF et de AB, et soient H, J, K les projections de S sur AB, EF, MF. Les quadrilatères XJSH, JSFK étant inscriptibles, on aura

$$MX.MH = MJ.MS, \quad MK.MF = MJ.MS;$$

donc

$$MX.MH = MK.MF, \text{ ou } MX = \frac{MK.MF}{MH}.$$

Mais

$$MK = \frac{MF}{2} = \frac{AB}{4}, \quad MF = \frac{AB}{2}, \quad MH = \frac{3AB}{4};$$

par suite,

$$MX = \frac{AB}{6} = MT.$$

Donc la droite EF passe par T, et comme elle est perpendiculaire à MS, et par suite à QT, elle sera tangente au cercle Q. L'enveloppe est donc le cercle Q.

Remarques. 1. On généraliserait aisément en prenant BL = m.AB, m étant une constante. L'enveloppe du cercle M est encore un limaçon, etc.

2. En transformant la figure ainsi généralisée par rayons vecteurs réciproques par rapport au point A, on retrouve la proposition connue :

Par un point fixe A on mène une droite variable rencontrant deux droites parallèles fixes en α, β. L'enveloppe du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre est une conique de foyer A.

Ont résolu la même question MM. Barisien et Brocard.

×Question 840.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

Trouver les valeurs de y et de z telles que les polynômes

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y, \quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

aient un facteur commun du second degré.

Solution par M. R. Lippens (athénée de Gand). Le facteur commun aux deux polynômes se trouvera aisément en cherchant le plus grand commun diviseur de ces polynômes, par la méthode des divisions successives. Les deux premiers restes sont

$$x^3 - x^2 - x + y - z, \quad 3x^2 + (1 + z - y)\,x + 2y - z.$$

Comme le premier terme du premier reste n'est pas divisible par 3, posons pour simplifier,

$$1 + z - y = 3u, \tag{1}$$
$$2y - z = 3v. \tag{2}$$

Le second reste devient alors, au facteur 3 près,

$$x^2 + ux + v.$$

Pour que ce trinôme soit un diviseur commun des polynômes proposés, il faut que le reste de la division du reste précédent par ce trinôme soit nul, ce qui donne les conditions

$$v + 1 - u^2 - u = 0, \tag{3}$$
$$z - y - v(u + 1) = 0.$$

En remplaçant dans cette dernière équation $(z - y)$ par sa valeur tirée de (1), elle devient

$$3u - 1 - v(u + 1) = 0.$$

On tire de là

$$u = \frac{1 + v}{3 - v};$$

en remplaçant dans l'équation (3) u par cette valeur, on obtient

$$v^3 - 5v^2 - v + 5 = 0, \text{ ou } (v+1)(v^2 - 6v + 5) = 0.$$

Cette dernière équation donne les trois racines

$$v = -1, \quad v = 5, \quad v = 1,$$

qui correspondent aux valeurs suivantes des autres quantités à considérer :

$u = 0, \quad y = -4, \quad z = -5, \quad x^2 + ux + v = x^2 - 1$
$u = -3, \quad y = 5, \quad z = -5, \quad x^2 + ux + v = x^2 - 3x + 5$
$u = 1, \quad y = 5, \quad z = 7, \quad x^2 + ux + v = x^2 + x + 1.$

Autre solution par UN ABONNÉ.

Question CXIX.

(Voir N. C. M., II, p. 190; LAISANT, IV, n° 843, p. 216).

Trouver le lieu du point de contact des tangentes parallèles à une direction donnée, à une série d'ellipses ou d'hyperboles homofocales.

(NICOLAÏDÈS.)

Solution par M. BARISIEN. Soit

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \qquad (1)$$

l'équation des coniques homofocales. Si m est le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y) de l'une de ces courbes, on a

$$\frac{(b^2 + \lambda)\, x}{(a^2 + \lambda)\, y} = -m ; \qquad (2)$$

on en déduit successivement

$$\lambda = -\frac{a^2 my + b^2 x}{x + my}, \quad a^2 + \lambda = \frac{c^2 x}{x + my}, \quad b^2 + \lambda = \frac{-c^2 my}{x + my} ;$$

puis, en substituant dans (1),

$$(mx - y)(my + x) = c^2.$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole équilatère concentrique aux ellipses homofocales et dont l'une des asymptotes est parallèle à la direction donnée.

NOTE. Cette question est pour ainsi dire classique. Pour la traiter géométriquement, soient F, F′ les foyers des courbes homofocales, d la direction donnée. La tangente et la normale en un point M de l'une de ces courbes rencontrent FF′ en deux points T, N, conjugués harmo-

niques par rapport à F et F'. Le lieu demandé peut donc être défini ainsi : Par deux points variables T, N, qui divisent FF' harmoniquement, on mène respectivement une parallèle t et une perpendiculaire n à d ; ces droites, par leur intersection, déterminent un point M du lieu. Comme les droites t, n se correspondent dans deux faisceaux projectifs parallèles, leur intersection engendre une hyperbole dont les asymptotes sont, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à d. Lorsque t ou n passe par le milieu O de FF', n ou t est à l'infini ; donc O est le centre de l'hyperbole.

Supposons que la tangente t passe par un point fixe T de l'un des axes des coniques homofocales ; la normale passera aussi par un point fixe N de cet axe. Dans ce cas, le lieu de M est la circonférence décrite sur TN comme diamètre.

Lorsque la tangente passe par un point fixe P, le lieu du point de contact est une strophoïde oblique (Voir *Mathesis*, (1), t. I, p. 148 ; Briot et Bouquet, *Géom. anal.*, Coord. polaires ; Maleyx, N. A., 1871).

×QUESTIONS D'EXAMEN.

566. Si a et b sont premiers entre eux, les nombres $a+b$, a^2-ab+b^2 ne peuvent admettre d'autre diviseur commun que le nombre 3.

×567. Si les équations

$$ax^2+2bx+c=0, \quad cx^2+2bx+a=0$$

ont une racine commune, les autres racines sont données par

$$ac(a+c)(x^2+1)+2b(c^2+a^2)x=0.$$

(*Collège d'Aberystwyth*, examens de 1892.)

568. Vérifier l'identité

$$4(x^2+xy+y^2)^3-27(x^2y+xy^2)^2=(x-y)^2(2x^2+5xy+2y^2)^2.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

846. Le carré de tout nombre impair, autre que 1, est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés. (E. Catalan.)

847. Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint les centres de courbure aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse.

(Greenstreet.)

848. On donne deux courbes U, U′ et deux droites OA, OB. Deux points M, M′ se meuvent respectivement sur les courbes U, U′ de manière que les droites OM, OM′ divisent harmoniquement l'angle AOB. On demande de trouver : 1° le point où la droite MM′ touche son enveloppe ; 2° la tangente à la courbe décrite par le point d'intersection T des tangentes menées en M à U et en M′ à U′. (J. NEUBERG.)

849. On considère les paraboles osculatrices en un point donné d'une circonférence donnée à cette circonférence. Montrer que : 1° le lieu des foyers des paraboles est un cercle ; 2° le lieu des projections du point donné sur l'axe des paraboles est une quartique, courbe fermée dont l'aire totale est le $\frac{1}{32}$ de l'aire du cercle donné. (E. N. BARISIEN.)

850. On mène deux tangentes parallèles à deux directions données, à une parabole quelconque inscrite au triangle ABC. Trouver le lieu du point de rencontre de ces deux tangentes. (V. RETALI.)

×**851.** La tangente en un point quelconque M d'une circonférence O rencontre un diamètre fixe AA′ au point T. Trouver le lieu du centre du cercle inscrit au triangle OMT. (SMEETS.)

852. On considère les triangles OAB formés par un rayon fixe OA d'un cercle donné et par un rayon variable OB. Trouver les lieux décrits par les centres des cercles tritangents, l'orthocentre, le centre du cercle des neuf points, les points de Brocard et les points de Lemoine. (DÉPREZ.)

×**853.** A et B étant deux nombres positifs quelconques et m un nombre entier positif, démontrer que l'on a toujours

$$(A+B)^m < 2^{m-1}(A^m+B^m).$$

×**854.** Soient O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, A′ le symétrique de A par rapport à O. Démontrer 1° que la somme des carrés des tangentes menées de A et A′ au cercle I est égale à $4R^2 - 4Rr - 2r^2$, R et r désignent les rayons des cercles O et I ; 2° que la circonférence décrite de A′ comme centre avec le rayon A′I coupe la circonférence O en un point L tel que $AL = \sqrt{AB.AC}$. (TUCKER.)

SUR UNE FONCTION REPRÉSENTATIVE DES COEFFICIENTS DU BINOME

par M. A. LAISANT, Docteur ès sciences.

Etant donnés les coefficients du développement de $(a+b)^n$, savoir

$$C_0 = 1, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n = 1,$$

on peut se proposer de trouver une fonction entière de degré n qui prenne respectivement les $n+1$ valeurs précédentes lorsqu'on donne à la variable x les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n.$$

Soit $F(x)$ cette fonction. Si l'on applique à cette question la formule d'interpolation de Lagrange, on trouve par un calcul facile,

$$(1) \qquad F(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\, x(x-1)(x-2)\ldots(x-n) \times \left[\frac{C_0^2}{x} - \frac{C_1^2}{x-1} + \frac{C_2^2}{x-2} - \cdots + (-1)^n \frac{C_n^2}{x-n}\right].$$

L'équation $y = F(x)$ est celle d'une courbe qui passe par les $n+1$ points ayant respectivement pour abscisses et pour ordonnées

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n,$$

et

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n.$$

En transportant l'origine au point ayant pour ordonnée 0 et pour abscisse $\frac{1}{2}n$, on aura pour nouvelle équation

$$y = F\left(x + \frac{n}{2}\right) = \Phi(x).$$

Si n est pair et égal à $2m$, on a pour la fonction $\Phi(x)$:

$$(2) \qquad \Phi_0(x) = \frac{2}{(2m)!}\,(x^2 - m^2)(x^2 - (m-1)^2)\ldots(x^2 - 1^2)\,x^2 \times \left[\frac{C_0^2}{x^2 - m^2} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{C_{m-1}^2}{x^2 - 1^2} + (-1)^m \frac{C_m^2}{2x^2}\right];$$

et si n est impair et égal à $2m-1$, il vient, pour la fonction $\Phi(x)$,

$$(3)\quad \Phi_1(x) = \frac{1}{(2m-1)!}(x^2-(m-\tfrac{1}{2})^2)\cdots(x^2-(\tfrac{3}{2})^2)(x^2-(\tfrac{1}{2})^2)$$
$$\times\left[\frac{(2m-1)\,C_0^2}{x^2-(m-\frac{1}{2})^2}-\frac{(2m-3)\,C_1^2}{x^2-(m-\frac{3}{2})^2}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1.C_{m-1}^2}{x^2-(\frac{1}{2})^2}\right].$$

Ces deux fonctions sont paires l'une et l'autre. La première prend les valeurs

$$C_{\frac{n}{2}},\quad C_{\frac{n}{2}-1},\quad \ldots,\quad C_1,\quad C_0,$$

pour les valeurs

$$0,\quad 1,\quad \ldots\quad \frac{n}{2}-1,\quad \frac{n}{2}$$

de la variable x.

La seconde prend les valeurs

$$C_{\frac{n-1}{2}},\quad C_{\frac{n-3}{2}},\quad \ldots,\quad C_1,\quad C_0,$$

pour les valeurs

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \ldots,\quad \frac{n-3}{2},\quad \frac{n-1}{2}$$

de la variable.

Les courbes représentées par les équations $y=\Phi_0(x)$, $y=\Phi_1(x)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des y; et les points par lesquels elles passent et dont les abscisses sont entières ou de la forme $p+\frac{1}{2}$ donnent la représentation des coefficients du binôme.

A ce titre, les diverses fonctions F, Φ_0, Φ_1, peuvent offrir un certain intérêt; et il pourrait y avoir lieu d'en étudier les propriétés.

En nous en tenant à la fonction F, nous pouvons lui donner une autre forme digne de remarque, en appliquant la formule de Newton, au lieu de celle de Lagrange, à la question que nous nous sommes posée au début; on a alors

$$(4)\quad \left.\begin{aligned} F(x) = C_0 + \frac{x}{1!}\Delta C_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 C_0 + \ldots + \\ \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n C_0, \end{aligned}\right.$$

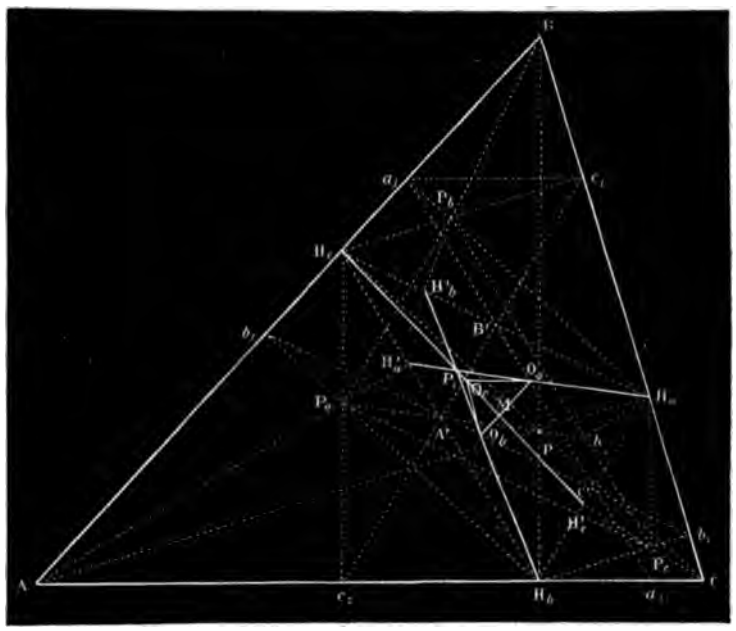
expression identique à celle de la relation (1).

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE;

par M. Émile BERTRAND, ancien élève de l'École Normale des Sciences.

Dans un précédent article (*Mathesis*, t. XI, p. 130), nous avons commencé l'étude de trois coniques remarquables associées au triangle ABC. Nous allons résumer les premières propriétés de ces courbes, puis continuer nos recherches.

1. Soient AH_a, BH_b, CH_c les trois hauteurs d'un triangle ABC, que nous supposons acutangle, et soit P leur point de concours. Construisons



aussi les hauteurs (AH'_a, H_cc_2, H_bb_3), (BH'_b, H_cc_1, H_aa_3), (CH'_c, H_aa_2, H_bb_1) des triangles AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b, et appelons P_a, P_b, P_c les orthocentres de ces triangles.

Les points H_b, H'_b *sont les foyers d'une ellipse* β, *touchant* BA, BC *en* H_c, H_a. En effet, B étant le point de concours de deux bissectrices extérieures et d'une bissectrice intérieure du triangle $H_bH_aH_c$, H'_b est le point de contact de H_aH_c avec un cercle exinscrit; donc les sommes

$$H_bH_a + H_aH'_b, \quad H_bH_c + H_cH'_b$$

sont égales au demi-périmètre du triangle $H_bH_cH_a$, et H_b, H'_b sont les foyers d'une ellipse passant par H_a, H_c et touchant en ces points BC, BA. L'axe focal est égal à 2R sin A sin B sin C.

Il existe de même deux autres ellipses, α et β, dont la première a pour foyers H_a, H'_a *et touche* AB, AC en H_c, H_b, *et dont la seconde, de foyers* H_c *et* H'_c, *touche* CA, CB *en* H_b, H_a.

3. Les points H'_a, H'_b, H'_c étant les points de contact *intérieurs* des côtés du triangle $H_aH_bH_c$ avec les cercles exinscrits correspondants, *les axes focaux* $H_aH'_a$, $H_bH'_b$, $H_cH'_c$ *des ellipses* α, β, γ *concourent en un même point* P_1, *qui est le point de Nagel du triangle* $H_aH_bH_c$ (*Mathesis*, VII, p. 67).

Les centres O_a, O_b, O_c *des ellipses* α, β, γ *sont les points où les côtés du triangle* A'B'C' *ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle* $H_aH_bH_c$, *touchent le cercle inscrit à* A'B'C'. En effet, le droite A'C' passe par le milieu O_b de $H_bH'_c$, et l'on a

$$A'O_b : C'O_b = H_cH'_b : H_aH'_b;$$

H'_b étant le point de contact de H_aH_c avec un cercle exinscrit à $H_aH_bH_c$, O_b est le point de contact de A'C' avec le cercle inscrit à A'B'C'.

Les points O_a, O_b, O_c *sont aussi les milieux des droites* a_1a_3, b_1b_3, c_1c_2, *et celles-ci sont égales à l'axe focal des trois ellipses* α, β, γ. En effet, C' étant le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle $b_1H_bH_a$, on a $C'b_1 = C'H_a$, et l'angle $C'b_1H_a = C'H_ab_1 = BH_aH_c$; donc b_1C' est parallèle à H_aH_c et, par suite, est le prolongement de A'C'. De même $A'b_3$ est le prolongement de C'A' et égal à $\frac{1}{2}$ H_bH_c.

3. *Les droites* AO_a, BO_b, CO_c *sont les symédianes des triangles* ABC, $O_aO_bO_c$. Car BO_b passant par le milieu de b_1b_3, passe aussi par le milieu B' de H_aH_c parallèle à b_1b_3; on peut aussi dire que la droite BB' joint le milieu de la corde H_aH_c à son pôle B, etc. O_a, O_c étant les milieux des droites a_2a_3, c_1c_2, et c_1a_3 étant parallèle à AC, les droites O_aO_c, BC sont parallèles; on en déduit que *les triangles* $O_aO_bO_c$, ABC *sont homothétiques et ont pour centre de similitude leur point de Lemoine commun.*

Le rapport de similitude est égal à cos A *cos* B *cos* C(*).

4. Soient X_a, X_b, X_c les milieux des hauteurs du triangle ABC. *Les droites* X_bX_c, X_cX_a, X_aX_c *sont perpendiculaires aux milieux des droites*

(*) Les côtés des triangles ABC, $O_aO_bO_c$ se coupent en six points d'une circonférence de Tücker (J. N.).

$H_aH'_a$, $H_bH'_b$, $H_cH'_c$ *et, par suite, dirigées suivant les petits axes des ellipses* α, β, γ(*).

En effet, les triangles $X_aa_2H_b$, $X_aa_3H'_b$ sont égaux ; car 1° X_a étant le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère birectangle $Aa_3H_aa_2$, on a $X_aa_2 = X_aa_3$ et *angle* $a_2X_aa_3 = 2A$; 2° $H_ba_2 = BH_a \cos C$, $H'_ba_3 = BH_a \cos BH_cH_a = BH_a \cos C$, de sorte que $H_ba_2 = H'_ba_3$; 3° l'angle $H_ca_3H'_b = BH_aH_c = A$, et, par suite, l'angle de H'_ba_3 avec H_ba_2 est égal à 2A, ce qui entraîne l'égalité des angles $X_aa_2H_b$ et $X_aa_3H'_b$. Donc $X_aH_b = X_aH'_b$; par analogie $X_cH_b = X_cH'_b$. On en conclut que la droite X_bX_c est perpendiculaire au milieu O_b de $H_bH'_b$.

Observons aussi que les droites X_aO_a, X_bO_b, X_cO_c sont perpendiculaires aux côtés du triangle A'B'C' ; elles passent donc par le centre M du cercle inscrit au triangle A'B'C'.

5. Désignons par λ le grand axe des ellipses α, β, γ, c'est-à-dire le demi-périmètre du triangle $H_aH_bH_c$; par σ_a, σ_b, σ_c les petits axes, et par f_a, f_b, f_c les distances focales $H_aH'_a$, $H_bH'_c$, $H_cH'_c$. Le triangle $H_bH_aH'_a$ donne

$$f_a^2 = \overline{H_aH_b}^2 + \overline{H'_aH_b}^2 + 2H_aH_b \cdot H'_aH_b \cos 2B$$
$$= (H_aH_b - H'_aH_b)^2 \sin^2 B + (H_aH_b + H'_aH_b)^2 \cos^2 B ;$$

mais

$$H_aH_b + H'_aH_b = \lambda, \quad H_aH_b = c \cos C, \quad H'_aH_b = c \cos A \cos B,$$
$$\lambda = c \sin A \sin B ;$$

donc

$$f_a^2 = c^2 (\cos C - \cos A \cos B)^2 \sin^2 B + \lambda^2 \cos^2 B$$
$$= \lambda^2 \left[\frac{(\cos C - \cos A \cos B)^2}{\sin^2 A} + \cos^2 B \right]$$
$$= \frac{\lambda^2}{\sin^2 A} [\cos^2 C + \cos^2 B - 2 \cos A \cos B \cos C]$$
$$= \lambda^2 - \frac{4\lambda^2}{\sin^2 A} \cos A \cos B \cos C.$$

Soit ρ le rayon du cercle inscrit dans A'B'C' (ou circonscrit à $O_aO_bO_c$) ;

(*) La figure ne contient qu'une partie des lettres dont il est question dans l'article.

comme il est la moitié de la distance de P à un côté de $H_aH_bH_c$, on trouve facilement $\rho = R\cos A\cos B\cos C$. Par conséquent,

$$f_a^2 = \lambda^2 - \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 A},\quad f_b^2 = \lambda^2 - \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 B},\quad f_c^2 = \lambda^2 - \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 C}.$$

Ensuite

$$\sigma_a^2 = \lambda^2 - f_a^2 = \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 A},\quad \sigma_b^2 = \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 B},\quad \sigma_c^2 = \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 C}.$$

On conclut de ces formules que *les petits axes des ellipses* α, β, γ *sont en raison inverse des côtés correspondants de* ABC.

6. Cherchons les équations des ellipses α, β, γ en prenant pour triangle de référence $H_aH_bH_c$ (Comp. Lemoine, *Mathesis*, (2), II, p. 252).

L'ellipse β touche en H_a, H_c les bissectrices extérieures du triangle $H_aH_bH_c$; son équation en coordonnées normales est donc

$$(y+z)(y+x) - My^2 = 0,\text{ ou } xy + yz + zx + Ny^2 = 0.$$

Pour déterminer N nous exprimons que le centre O_b est situé sur la droite H_bH_b', dont l'équation est

$$\frac{x}{z} = \frac{H_b'H_c\sin H_aH_cH_b}{H_b'H_a\sin H_cH_aH_b} = \frac{\operatorname{cotg} BH_cH_a\sin 2C}{\operatorname{cotg} BH_aH_c\sin 2A} = \frac{\cos^2 C}{\cos^2 A}.$$

Le centre de β vérifie les égalités

$$\frac{f_x'}{\sin 2A} = \frac{f_y'}{\sin 2B} = \frac{f_z'}{\sin 2C},$$

ou

$$\frac{y+z}{\sin 2A} = \frac{x+z+2Ny}{\sin 2B} = \frac{x+y}{\sin 2C}.$$

Éliminant y, on obtient

$$\frac{x+z(1-2N)}{\sin 2B - 2N\sin 2A} = \frac{z+x}{\sin 2A - \sin 2C};$$

remplaçant x, z par les quantités proportionnelles $\cos^2 C$, $\cos^2 A$, on trouve $N = \cos^2 B$.

Les équations cherchées sont donc

$$x^2\cos^2 A + xy + yz + zx = 0,$$
$$y^2\cos^2 B + xy + yz + zx = 0,$$
$$z^2\cos^2 C + xy + yz + zx = 0.$$

En les combinant par soustraction deux à deux, on trouve

$$x\cos A \pm y\cos B = 0,\quad y\cos B \pm z\cos C = 0,\quad z\cos C \pm x\cos A = 0.$$

Ainsi, les ellipses α et β, qui se touchent en H_c se coupent en deux autres points L_c, L'_c situés sur deux droites H_cL_c, $H_cL'_c$ conjuguées harmoniques par rapport à l'angle $H_aH_cH_b$. Les trois couples $(H_aL_a, H_aL'_a)$, $(H_bL_b, H_bL'_b)$, $(H_cL_c, H_cL'_c)$(*) sont les couples de côtés opposés d'un quadrangle complet dont les sommets ont pour coordonnées.

$$\pm\frac{1}{\cos A},\quad \pm\frac{1}{\cos B},\quad \pm\frac{1}{\cos C},\quad \text{ou}\ \pm\frac{1}{\sin\frac{1}{2}H_a},\quad \pm\frac{1}{\sin\frac{1}{2}H_b},\quad \pm\frac{1}{\sin\frac{1}{2}H_b}.$$

H_a, H_b, H_c désignant les angles du triangle $H_aH_bH_c$.

Les coordonnées des points L_c, L'_c vérifient les équations

$$x\cos A = -y\cos B = -z\frac{\cos A - \cos B}{1 - \cos A\cos B},$$

$$x\cos A = y\cos B = -z\frac{\cos A + \cos B}{1 + \cos A\cos B}$$

et la droite $L_cL'_c$ a pour équation

$$x\cos^2 A\sin^2 B - y\cos^2 B\sin A + z(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0.$$

7. Cherchons maintenant les directrices qui correspondent aux foyers H'_a, H'_b, H'_c. Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupant sur la directrice correspondante, on voit que les directrices cherchées sont les perpendiculaires abaissées des points A, B, C respectivement sur $H_aH'_a$, $H_bH'_b$, $H_cH'_c$; soient h_a, h_b, h_c les points où elles rencontrent les côtés correspondants H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b du triangle orthique.

Comme Ah_a est la polaire de H'_a par rapport à la conique α, les points h_a, H'_a partagent harmoniquement H_bH_c; donc Ah_a est la conjuguée harmonique de AH'_a par rapport à l'angle BAC. Mais AH'_a, perpendiculaire à H_bH_c, passe par le centre O du cercle ABC. Donc *les directrices des coniques* α, β, γ *sont les conjuguées harmoniques des rayons* AO, BO, CO *du cercle* ABC *par rapport aux côtés adjacents du triangle* ABC; leurs équations sont

$$\frac{y}{\cos B} + \frac{z}{\cos C} = 0,\quad \frac{z}{\cos C} + \frac{x}{\cos A} = 0,\quad \frac{x}{\cos A} + \frac{y}{\cos B} = 0,$$

(*) Les droites H_aL_a, $H_aL'_a$ rencontrent H_bH_c aux pieds des bissectrices de l'angle H_bAH_c. (J. N.).

car les coordonnées de O par rapport au triangle ABC sont cos A, cos B, cos C.

Soit $O_aO_bO_c$ le triangle des trois directices. *Il est homologique avec* ABC, *le centre d'homologie étant* O. *Il est homothétique au triangle* $X_aX_bX_c$ *des petits axes, le centre de similitude étant le point de Lemoine de* ABC *et le rapport de similitude étant* cos A cos B cos C; en effet, le système des triangles $O_aO_bO_c$ et ABC est semblable au système $X_aX_bX_c$, $O_aO_bO_c$.

8. Dans le système *orthocentrique* ABCP, nous pouvons considérer chacun des points comme l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Nous obtenons ainsi trois nouveaux triangles PBC, PCA, PBA, ayant respectivement pour orthocentres A, B, C et ayant même triangle orthocentrique $H_aH_bH_c$; chacun d'eux donne lieu à trois coniques analogues aux coniques α, β, γ.

Si nous considérons le triangle APC, nous aurons :

1° une hyperbole β_b tangente en H_a, H_c aux côtés AP, CP et ayant pour foyers le point H_b et la projection de P sur H_aH_c;

2° une hyperbole α_b tangente en H_a, H_b aux côtés AP, AC et ayant pour foyers le point H_c et la projection de A sur H_aH_b;

3° Une hyperbole γ_b touchant en H_a, H_c les côtés CA, CP et ayant pour foyers H_a et la projection de C sur H_aH_c.

On peut de même distinguer trois hyperboles α_a, β_a, γ_a associées au triangle PBC, et trois hyperboles α_c, β_c, γ_c associées au triangle PCA.

Les équations de ces neuf hyperboles peuvent se conclure par analogie de celles des ellipses α, β, γ. Par exemple, $H_aH_bH_c$ étant à la fois le triangle orthocentrique de ABC et CPA, les angles A, B, C, quand on passe de α, β, γ à α_b, β_b, γ_b, sont à remplacer par $\frac{1}{2}\pi - A$, $\pi - B$, $\frac{1}{2}\pi - C$, et les lignes BA, BC qui avaient pour équations $x + y = 0$, $z + y = 0$, par les lignes AP, CP dont les équations sont $x - y = 0$, $z - y = 0$, de sorte que y se change en $-y$. Il en résulte que les équations de α_b, β_b, γ_b sont :

$$x^2 \sin^2 A - xy - yz + zx = 0, \qquad (\alpha_b).$$

$$y^2 \cos^2 B - xy - yz + zx = 0, \qquad (\beta_b).$$

$$z^2 \sin^2 C - xy - yz + zx = 0. \qquad (\gamma_b).$$

Pareillement, on trouve pour les deux autres groupes :

$$x^2\cos^2 A - xy + yz - zx = 0, \qquad (\alpha_a).$$
$$y^2\sin^2 B - xy + yz - zx = 0, \qquad (\beta_a).$$
$$z^2\sin^2 C - xy + yz - zx = 0; \qquad (\gamma_a).$$
$$x^2\sin^2 A + xy - yz - zx = 0, \qquad (\alpha_c).$$
$$y^2\sin^2 B + xy - yz - zx = 0, \qquad (\beta_c).$$
$$z^2\cos^2 C + xy - yz - zx = 0. \qquad (\gamma_c).$$

En combinant convenablement les équations des douze coniques, on peut trouver un grand nombre de propriétés de leurs intersections. Par exemple, les équations des courbes α et α_a donnent, par soustraction, $x(y+z)=0$; deux de leurs points communs, H_b et H_c, appartenant à la droite $x=0$, les deux autres sont situés sur la droite $y+z=0$. Donc *les courbes* α *et* α_a, β *et* β_b, γ *et* γ_c *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *aux deux mêmes points*. Pareillement, *les courbes* α_b *et* α_c, β_a *et* β_c, γ_a *et* γ_c *rencontrent respectivement* AH_a, BH_b, CH_c *aux deux mêmes points*.

Si l'on fait $z=-y$ dans l'équation de α, on trouve $x^2\cos^2 A - y^2$; donc *les points de rencontre de* α *avec* BC *divisent harmoniquement le segment de* BC *compris entre* H_a *et* H_bH_c. De même *les courbes* α_b *et* α_c *partagent harmoniquement le segment de* AH_a *compris entre* H_a *et* H_bH_c.

9. Soient a_1, b_1, c_1 les côtés du triangle $H_aH_bH_c$. *Les hyperboles* α_a, β_a, γ_a *ont pour axe réel*

$$\lambda_a = \frac{1}{2}(b_1 + c_1 - a_1) = 2R\sin A\cos B\cos C ;$$

leurs trois axes focaux concourent en un adjoint du point de Nagel de $H_aH_bH_c$.

Les groupes $(\alpha_b, \beta_b, \gamma_b)$, $(\alpha_c, \beta_c, \gamma_c)$ ont pour axe réel

$$\lambda_b = \frac{1}{2}(c_1 + a_1 - b_1) = 2R\sin B\cos C\cos A,$$

$$\lambda_c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1 - c_1) = 2R\sin C\cos A\cos B.$$

Soient ρ_a, ρ_b, ρ_c les rayons des cercles exinscrits au triangle A'B'C', et σ'_a, σ'_b, σ'_c les axes imaginaires des hyperboles α_a, β_a, γ_a ; on a

$$\sigma'^2_a = \frac{4\lambda_a^2\rho_a}{R\sin^2 A}, \quad \sigma'^2_b = \frac{4\lambda_a^2\rho_a}{R\cos^2 B}, \quad \sigma'^2_c = \frac{4\lambda_a^2\rho_a}{R\cos^2 C}.$$

Il existe de nombreuses relations entre les axes des douze coniques; par exemple

$$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = \lambda,$$

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = 4\lambda\rho^2,$$

$$\lambda_a \operatorname{cotg} A = \lambda_b \operatorname{cotg} B = \lambda_c \operatorname{cotg} C = 2\rho,$$

$$\lambda_a\rho_a = \lambda_b\rho_b = \lambda_c\rho_c = \lambda\rho,$$

$$\sigma_a'^2 \sin 2A = \sigma_b''^2 \sin 2B = \sigma_c'''^2 \sin 2C.$$

Il serait facile de transporter aux trois groupes d'hyperboles les propriétés du groupe α, β, γ relatives au triangle des centres et au triangle des directrices.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de mécanique à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par V. JAMET, ancien élève de l'École normale supérieure, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée de Marseille. Paris, G. Carré, 1893 (250 p. gr. in-8°). Prix : 5 francs.

SOMMAIRE. *Préface.* Notions historiques sur les propositions développées dans l'ouvrage. *Introduction.* Tangente à une courbe gauche. Différentielle de l'arc. Plan osculateur. Rayon de courbure et cercle osculateur.

Première partie. Cinématique et dynamique du point. 1. *Cinématique.* Vitesse et accélérations dans le mouvement rectiligne et dans le mouvement curviligne. Décomposition des vitesses et des accélérations. Exemple : Cas d'un point mobile sous l'influence d'une force centrale; loi des aires. 2. *Dynamique du point matériel.* Principe de l'inertie et de l'indépendance des effets des forces. Composition des mouvements dus à plusieurs forces constantes. Mouvement des projectiles. 3. Forces de direction constante et de grandeur variable. Mouvement des planètes; mouvement du pendule. 4. Travail des forces. Théorème des forces vives. Application au pendule simple et au mouvement cycloïdal d'un point pesant. Moments des forces et des quantités de mouvement. Lignes géodésiques des surfaces de révolution. *Note.* Tautochronisme de la cycloïde.

Deuxième partie. Statique du solide invariable libre. 1. Composition des forces concourantes ou parallèles. Théorème des moments par rapport à un plan. 2-3. Centres de gravité. Théorèmes de Guldin et de Chasles. Transport des forces appliquées à un solide en un point. 4. Couples. 5. Conditions d'équilibre d'un solide invariable. *Note.* Notions sur les intégrales multiples. Applications à l'attraction d'une sphère homogène sur un point matériel et à la recherche des centres de gravité.

Autant que nous pouvons en juger, le *Traité de Mécanique* de M. Jamet est écrit

avec clarté et rigueur (*) ; l'auteur, qui n'abuse pas de l'analyse, s'en sert très bien quand il l'emploie, mais en général, il préfère les considérations géométriques directes, à la manière de Delaunay.

Cours de Mathématiques spéciales. Supplément comprenant la trigonométrie et la mécanique conforme au programme du 14 mars 1892, par G. DE LONGCHAMPS, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Paris, Delagrave (XI-472 p. in-8°). Prix : 7 fr. 50.

Le Supplément de M. de Longchamps comprend trois parties. 1° Des compléments de trigonométrie (68 pages). 2° Des compléments de géométrie infinitésimale, de calcul intégral et de géométrie analytique (183 pages). 3° La mécanique (184 p.). Des exercices divers (33 p.) terminent l'ouvrage.

I. *Trigonométrie.* Théorème des projections. Division des arcs. Usage des tables. Équations binômes. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Résolution des triangles sphériques rectangles. — L'auteur fait plusieurs fois usage de la formule suivante, qu'il appelle formule symbolique de M. Carvallo, quand elle est écrite sous une forme spéciale,

$$AB\cos(A, B) = \Sigma a_i b_j \cos(a_i, b_j),$$

les lignes $(A, a_1, a_2 \ldots a_m)$ et $(B, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ formant ou pouvant former deux polygones fermés. — Cette formule est loin d'être nouvelle ; elle remonte au moins à Grassmann et probablement était connue même avant celui-ci.

Des exercices nombreux (11 1/2 pages) accompagnent les subdivisions les plus importantes des compléments de Trigonométrie.

II. Géométrie infinitésimale : Tracé des tangentes et des normales ; courbure, osculation ; courbes parallèles, isoptiques, conchoïdales, diamétrales. Les cubiques unicursales. — Intégrales définies, quadratures. — Coordonnées trilinéaires, barycentriques, tangentielles — Intersection de deux quadriques.

Vingt-trois pages d'exercices.

III. (A) *Cinématique du point.* Plan osculateur, arc et courbure d'une courbe gauche ; volume des corps. — Vitesse et décomposition des vitesses dans le mouvement uniforme. — Vitesse et accélération dans le mouvement varié et en particulier dans le mouvement uniformément varié. — Tracé des tangentes par la méthode de Roberval (exposé fait avec soin de manière à éviter l'erreur commise à ce sujet, non par Roberval, mais par le rédacteur de sa méthode). Soit dit, en passant, selon nous, il n'y a, au fond, aucune différence entre la géométrie cinéma-

---

(*) Bien entendu, M. Jamet, pas plus qu'aucun autre auteur, ne démontre vraiment que la force est égale à l'accélération multipliée par la masse. C'est là une simple convention de langage pour définir le mot *force*. On peut faire une remarque analogue à propos de quelques autres principes de mécanique rationnelle.

tique ou même la mécanique tout entière, le temps et toutes les quantités employées en mécanique, étant en réalité, définies géométriquement, dans les écrits des mathématiciens.

(B) *Dynamique du point matériel.* Les forces; mouvement des projectiles dans le vide. — La masse : Proportionnalité des forces aux masses et aux accélérations. — Composition et décomposition des forces. — Travail et force vive.

(C) *Statique du solide invariable libre.* Composition et équilibre des forces; moments par rapport à un plan. — Théorie des centres de gravité : applications. — Les moments. — Les couples. — Réduction des forces. — Homogénéité des formules; système CGS.

Vingt pages d'exercices sur la mécanique.

IV. Exercices divers et questions posées dans les divers concours.

Appendice. Le nouveau programme d'algèbre, de trigonométrie et de mécanique.

Le *Supplément* de M. de Longchamps est appelé, croyons-nous, à rendre aux professeurs de mathématiques spéciales, les mêmes services que son *Algèbre* et sa *Géométrie analytique*. L'auteur ne s'égare pas dans les broussailles des discussions subtiles sur les principes abstraits ou expérimentaux de la mécanique; il écrit pour les élèves, sous une forme claire et nette; il appuie tout ce qu'il dit d'exemples bien choisis et ne consacre pas moins du sixième de son livre à des exercices variés, persuadé que ceux-là seuls seront capables de se lancer plus tard dans la critique philosophique des bases de la science, qui auront acquis, par un travail personnel, le maniement facile des formules de la mécanique analytique.

×QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE

par M. G. DE ROCQUIGNY (suite, voir *Mathesis*, p. 112).

14. Si la somme de deux nombres entiers est un carré ou le double d'un carré, la somme de leurs cubes est respectivement une demi-somme ou une somme de trois carrés.

En effet

$$a^3 + b^3 = \frac{(a+b)\,[a^2 + (a-b)^2 + b^2]}{2}.$$

Des théorèmes analogues se déduisent des identités

$$2\frac{a^5 + b^5}{a+b} = a^4 + b^4 + a^2(a-b)^2 + b^2(a-b)^2,$$

$$2\frac{a^7 + b^7}{a+b} = a^6 + b^6 + a^4(a-b)^2 + a^2b^2(a-b)^2 + b^4(a-b)^2,$$

$$2\frac{a^9 + b^9}{a+b} = a^8 + b^8 + (a^2 - b^2)^2(a^2 - ab + b^2)^2 + a^2b^2(a-b)^4.$$

15. Si 3^{n-1} est la somme de trois carrés distincts, 3^n est la somme de quatre carrés.

Cette proposition résulte de l'identité

$$3(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2+(a+b+c)^2,$$

cas particulier de l'identité de Lagrange.

16. La somme des n premiers carrés pairs est une pile triangulaire :

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}.$$

17. La somme des n premiers carrés impairs est une pile triangulaire :

$$\frac{(2n-1)\,2n(2n+1)}{6}.$$

18. La somme des a premiers carrés entiers est une somme de deux piles triangulaires(*) ;

$$\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}=\frac{(a-1)\,a(a+1)}{6}+\frac{a(a+1)(a+2)}{6}.$$

19. Si n est un nombre triangulaire, $(n+1)^2$ est la somme de trois nombres triangulaires

$$(n+1)^2=n+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

20. Si n est premier avec 6, le nombre

$$(n-1)^3-(n-4)^2+1$$

est divisible par 24.

21. La somme des carrés des doubles des n premiers nombres triangulaires

$$1^2.2^2+2^2.3^2+\cdots+n^2(n+1)^2$$

est

$$\frac{1}{15}n(n+1)(n+2)[3n(n+2)+1].$$

(*) Conséquence immédiate de ce qu'un carré de boulets se partage par une diagonale en deux triangles de boulets.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**16**. ***Sur les Brocardiens d'un point par rapport à un point*** (par M. Socolof, de Kief). Le théorème que j'ai communiqué à ***Mathesis***(*) l'année dernière, a pour corrélatif le suivant, dont la démonstration analytique est très facile :

M *et* M_1 *étant deux points quelconques du plan d'un triangle* ABC, *soient* A_1, B_1, C_1 *les points d'intersection des couples de droites* BM *et* CM_1, CM *et* AM_1, AM *et* BM_1, *et soient* A_2, B_2, C_2 *les points d'intersection des couples de droites* BM_1 *et* CM, CM_1 *et* AM, MA_1 *et* BM : *les droites* AA_1, BB_1, CC_1, *concourent en un même point* N; *les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *en un même point* N_1.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points M, M_1; les coordonnées de N vérifient les équations

$$xy_1z_2 = yz_1x_2 = zx_1y_2;$$

et celles de N_1, les équations

$$xy_2z_1 = yz_2x_1 = zx_2y_1.$$

Si les coordonnées de M_1 sont égales entre elles, les coordonnées de N_1, N_2 sont respectivement

$$\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{y_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y_2}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{x_2};$$

alors N_1 est le ***Brocardien direct*** de M_2, N_2 le ***Brocardien inverse***. Quand on adopte les coordonnées barycentriques, M_1 est le centre de gravité de ABC; dans le système des coordonnées normales, c'est le centre du cercle inscrit.

×**17**. ***Aire de la cycloïde***. Considérons une demi-cycloïde AKMB, dont l'origine est en A et dont le point le plus élevé est en B. Soient AT, BT les tangentes en A et en B, AZ une parallèle à BT, BZ une parallèle à AT. Sur le côté AT du rectangle ATBZ comme diamètre, et à l'extérieur du rectangle, construisons une demi-circonférence ADEFT. Par les points D, E, F de cette circonférence, menons DL, EK, FM, parallèles à AZ, et rencontrant la cycloïde respectivement en L, K, M. On aura, comme on le voit aisément, à cause de la définition de la cycloïde, DL =

(*) Voir *Mathesis* (2), II, pp. 193 et 252.

arc circulaire DA, EK = arc EA, FM = arc FA, TB = la demi-circonférence TEA. Par suite, il est facile d'évaluer l'aire AETBKA = u.

Élevons à AT en chacun des points m, où cette ligne est rencontrée par une parallèle FM à AZ, une perpendiculaire $mm' = FM =$ arc FA. Le lieu des points m' sera une certaine courbe $Bm'A$, qui aura pour centre de symétrie le point e' situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de AT(*). L'aire comprise entre cette courbe, BT et AT est évidemment égale à u, et à l'aire du triangle BTA ou πa^2, si $AT = 2a$. Donc $u = \pi a^2$. Par conséquent, l'aire cycloïdale extérieure $AMBT = \frac{1}{2}\pi a^2$, et l'aire intérieure de la demi-cycloïde est $2\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$. L'aire intérieure totale est donc $3\pi a^2$.

On peut trouver aussi de cette manière l'aire d'une cycloïde allongée ou raccourcie (G. Holzmuller, *Journal de M. Schlömilch*, t. XXI, p. 128-129)(**).

18. Détermination de $u = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x)\,lx}\,dx$, quand $0 < m < 1$.

1. En faisant $x = (1 : z)$ dans u, on trouve

$$u = \int_1^\infty \frac{z^{m-1} - z^{-m}}{(1+z)\,lz}\,dz = \int_1^\infty \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x)\,lx}\,dx.$$

Donc

$$2u = \int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x)\,lx}\,dx. \qquad (1)$$

2. On a ensuite, en faisant $x = (1 : z)$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)\,lx} = \int_\infty^0 \frac{z^{-m}dz}{(1+z)\,lz} = \int_0^\infty \frac{-x^{-m}dx}{(1+x)\,lx}.$$

Donc, d'après (1)

$$u = \int_\infty^0 \frac{x^{-m}dx}{(1+x)\,lx}.$$

(*) Cette courbe est appelée la *compagne de la cycloïde*.

(**) Il existe d'autres méthodes géométriques pour trouver l'aire de la cycloïde. En voici une très simple. Le tangente en M est parallèle à la corde FT ; soit μ le point où elle coupe BT ; la droite $M\mu$ roulant sur la cycloïde engendre la même aire que la corde TF du cercle ADT tournant autour de T.

3. On a ensuite, d'après une formule connue,

$$\frac{du}{dm} = \int_0^\infty \frac{x^{-m}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin m\pi}, \quad u = C + l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} m\pi.$$

Fesant $m = \frac{1}{2}$, ce qui donne $u = 0$, on reconnaît que $C = 0$. Donc

$$u = l \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{2}\right),$$

résultat trouvé autrement par KUMMER, dans le *Journal de Crelle*, t. 17, p. 224 (WALTON, *Quarterly Journal of Mathematics*, t. 12, p. 185).

×19. *Théorème d'arithmétique* (voir *Mathesis*, p. 137). Nous complétons ici la démonstration du théorème de Baschwitz, d'après une note due à M. G. de Longchamps (*J. M. E.*, n° de juin, p. 126).

On peut se donner le dénominateur x des quatre fractions pourvu que x soit une somme de trois carrés. Si x est une somme de deux carrés *inégaux*, les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ donnent encore une solution pourvu que l'on suppose $m = 0$ ou $n = 0$; mais si l'on y fait $p = 0$, il n'y a pas *transformation effective*.

La solution est encore illusoire si l'on fait $m = 0$, $n = p$. Dans ce cas, l'identité

$$a^2 + b^2 + c^2 =$$
$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$$

démontre le théorème(*).

Remplaçant a, b, c par $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, on obtient

$$(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 =$$
$$(a+b+c+\tfrac{3}{2})^2 + (-a+b+c+\tfrac{3}{2})^2 + (a-b+c+\tfrac{3}{2})^2 + (a+b-c+\tfrac{3}{2})^2.$$

C'est l'identité d'où M. Baschwitz a déduit le théorème suivant :

La somme de trois carrés impairs est toujours la somme de quatre carrés fractionnaires.

Cette proposition est un peu moins générale que celle qui a fait l'objet de notre première note; la généralisation est due à M. de Longchamps.

Nous empruntons encore au même article du J. M. E. la remarque suivante. L'identité

$$(m^2 + n^2 + p^2)^2 = (m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2$$

(*) On peut multiplier les deux termes des quatre fractions par n.

est comprise dans l'égalité d'Euclide :

$$(m^2 + p^2)^2 = (m^2 - p^2)^2 + (2mp)^2,$$

si l'on remplace m^2 par $m^2 + n^2$. (J. N.)

×30. *Pièges mathématiques.* A propos de la note publiée dans *Mathesis*, 1892, p. 161 (*Un angle obtus est égal à l'angle droit*), M. Georges Delahaye, de Roye, nous rappelle les deux pièges suivants, qui sont bien connus mais nous donnent l'occasion de signaler ce qui les distingue du piège d'une toute autre nature dont nous venons de rappeler le titre.

1° Joignons le milieu E de BC aux milieux D, F de AB, AC; la ligne brisée BDEFC a pour périmètre BA + AC. De même, si l'on joint le milieu G de BE aux milieux H, I de BD et DE, et le milieu L de EC aux milieux K, M de EF et FC, le contour BHGIEKLMC et égal au contour BDEFC. En continuant ainsi, on aura une suite de lignes brisées ayant pour périmètre BA + AC. *Mais ces lignes ont pour limite la droite* BC; *donc* BC = BA + AC.

2° Sur la droite AB comme diamètre, construisons la demi-circonférence AXB. C étant le milieu de AB, construisons sur AC et CB comme diamètres les demi-circonférences AYC, CZB; il est facile de voir que les lignes AXB, AYCZB ont même périmètre. D et E étant les milieux de AC et CB, si sur AD, DC, CE, EB comme diamètres on construit des demi-circonférences, la somme de ces lignes sera encore égale à AXB. En continuant ainsi, on obtient une suite de contours courbes dont le périmètre égale AXB et *qui ont pour limite le segment rectiligne* AB; *donc*, etc.

Au fond, les pièges précédents reposent sur une assertion *purement arbitraire*, savoir que la longueur d'une ligne dont les points se rapprochent indéfiniment de ceux d'une autre ligne fixe a pour limite la longueur de celle-ci. Le piège indiqué dans *Mathesis* (2), II, p. 161, repose sur une construction que l'*on est forcé de faire, bien ou mal*; si on la fait mal, on arrive à une absurdité. On peut en conclure qu'il n'est pas indifférent, comme on le dit parfois, de raisonner sur des figures assez exactes ou sur des figures grossières.

31. *Centre de gravité du prismatoïde.* A l'article publié, pp. 138-139, comparez Massau, *Intégration graphique*, n° 284, où l'on trouve plusieurs déterminations du centre de gravité en question.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 801.

(Voir *Mathesis* (2), t. III, p. 31.)

Sur une droite AB *donnée de grandeur et de position dans le plan horizontal, considérons le point* A *comme un élément de la surface de ce plan horizontal. Soit alors une droite* BC *située dans le plan vertical qui passe par* AB ; *si l'on fait glisser sur* BC *une lumière d'intensité constante, il y a une position* M *pour laquelle l'éclairement en* A *est maximum. Trouver le lieu des points* M *satisfaisant à cette condition, quand la droite* BC *prend toutes les positions possibles autour du point* B *et dans le plan vertical.*

(A. Morel.)

Solution par M. H. Brocard. Soient a la distance BA, BAx et By les axes de coordonnées rectangulaires, θ l'angle CBA, ω l'angle MAB, T l'intensité du foyer M.

L'intensité de la lumière en A aura pour expression (*)

$$\frac{T\sin\omega}{\overline{AM}^2} = T.\frac{x\operatorname{tang}\theta}{(a^2+x^2\sec^2\theta-2ax)^{\frac{3}{2}}}.$$

La condition de maximum est donnée par l'équation dérivée

$$2x^2\sec^2\theta - ax - a^2 = 0.$$

Mais

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x},\quad \sec^2\theta = \frac{x^2+y^2}{x^2}.$$

L'équation du lieu des points M est donc

$$2(x^2+y^2) - ax - a^2 = 0,$$

qui représente une circonférence passant en A, et dont le centre est sur BA, au quart de BA à partir de B. Son rayon est $\frac{5}{4}$ BA.

Solution géométrique par M. Vladimirescu.

(*) Il faut tenir compte de la *loi du cosinus* (voir les Traités de Physique).

Question 805.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

Trouver dans le plan d'un rectangle ABCD ***un point*** M ***tel, que les triangles*** ABM, BCM, CDM, DAM ***aient des cercles circonscrits égaux. Trouver le lieu géométrique du point*** M ***et des orthocentres des quatre triangles.*** (H. MANDART.)

Solution de P. H. SCHOUTE. Soient O le centre du rectangle; menons OX parallèle à AD, BC, et OY parallèle à CD, BA.

Si l'on décrit des cercles égaux sur AB et CD comme cordes, il y a deux cas à distinguer. Les centres N_1, N_2 de ces cercles situés sur OX sont des points symétriques par rapport à O, ou tel n'est pas le cas. Dans la première hypothèse, les deux points d'intersection se trouvent sur OY et ne satisfont pas en général aux conditions du problème. Dans le second cas, soient P_1, P_2 les milieux de AB, DC et MM' la corde commune qui coupe N_1N_2 en son milieu N; on a

$$P_1N_1 = P_2N_2, \quad \text{d'où} \quad P_1N_1 = P_2N_2 = ON.$$

Les triangles AP_1N_1 et N_1MN donnent, si l'on pose

$$AD = 2a, \quad AB = 2b, \quad ON = x, \quad MN = y :$$

$$b^2 + x^2 = \rho^2, \quad a^2 + y^2 = \rho^2; \tag{1}$$

donc aussi

$$x^2 - a^2 = y^2 - b^2. \tag{2}$$

Comme on trouve les mêmes relations (1) pour deux cercles de rayon ρ décrits sur AD et BC, le lieu du point M est une hyperbole équilatère représentée par l'équation (2), et dont les asymptotes sont les bissectrices de l'angle YOX et de son supplément. Cette hyperbole passe par A, B, C, D. D'après une propriété connue, cette courbe est en même temps le lieu géométrique des orthocentres (M' est l'orthocentre des triangles ADM, BCM).

Une autre bonne solution, mais moins directe que la précédente, nous a été adressée par M. DROZ-FARNY.

Question 810.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 55.)

Soient AA', BB' *deux diamètres rectangulaires d'un cercle* O. *D'un point quelconque* C *de la circonférence on abaisse une perpendiculaire* CD *sur* AA', *on porte sur* OC *une longueur* OE = OD *et l'on projette* E *en* F *sur* AA'. *Trouver le lieu du point de rencontre des droites* BA *et* CD. *La figure donne le moyen de construire un angle dont la tangente soit le carré du cosinus d'un angle donné, ou dont le cosinus soit la racine carrée de la tangente d'un angle donné.* (Decamps.)

Solution par MM. Quint, Vladimirescu, Déprez, Bellens, Droz-Farny, Morel et M^lle^ De Haas. Prenons pour axes de coordonnées BB' et la tangente en B, et soient $OC = r$, *angle* $COA = \varphi$, en sorte que $OD = r\cos\varphi$, $OF = r\cos^2\varphi$. Les coordonnées (x, y) du point de rencontre de CD avec BF sont

$$x = OD = r\cos\varphi,\quad y = OD\frac{OB}{OF} = \frac{r}{\cos\varphi};$$

l'équation du lieu de ce point est donc $xy = r^2$.

Soit θ l'angle OBF; on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{OF}{OB} = \cos^2\varphi.$$

Cette égalité conduit à une solution de la seconde partie de la question.

×Question 820.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 79.)

Démontrer que $x - 2$ *est facteur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & x & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

et trouver les autres facteurs.

(*Collège d'Aberystwyth*, examens de décembre 1892.)

Solution par MM. RETALI, QUINT, GREENSTREET, BARISIEN, DÉPREZ, DECAMPS et M^lle^ DE HAAS. Posons

$$\frac{l}{m}+\frac{m}{l}=\lambda,\quad \frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\mu,\quad \frac{n}{l}+\frac{l}{n}=\nu; \tag{1}$$

on trouve pour la valeur du déterminant

$$f(x)=x^3-x(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+2\lambda\mu\nu;$$

mais, eu égard aux égalités (1), nous avons

$$4-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+\lambda\mu\nu=0;$$

donc $f(2)=0$ et, par conséquent, $f(x)$ est divisible par $x-2$. Puisque

$$\frac{f(x)}{x-2}=x^2+2x-\lambda\mu\nu,$$

les deux autres facteurs sont

$$x+1\mp\sqrt{1+\lambda\mu\nu}.$$

Question CCCCXXIII.

(N. C. M., IV, p. 334; Laisant, IV, 905.)

Démontrer que, dans toute conique, un point quelconque M, ***le centre de courbure correspondant, et les points d'intersection de la normale en*** M ***avec les perpendiculaires*** FG, *fg*, ***menées des foyers*** F, *f* ***aux rayons vecteurs*** FM, *f*M, ***sont conjugués harmoniques.***

Solution par M. BARISIEN. Soient O le centre de l'ellipse, et C le centre de courbure relatif au point M, dont l'angle d'anomalie excentrique est φ.

Le coefficient angulaire de OM est

$$m_1=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}, \tag{1}$$

celui de OC est

$$m_2=\frac{-\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi}{\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi}=-\frac{a\sin^3\varphi}{b\cos^3\varphi}. \tag{2}$$

La normale en M a pour équation

$$ax\sin\varphi-by\cos\varphi=c^2\sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$

la droite FG,

$$by \sin\varphi + (x - c)(a\cos\varphi - c) = 0. \qquad (4)$$

Une droite quelconque passant par le point d'intersection des droites (3) et (4) est représentée par

$$\lambda(ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi) + by\sin\varphi + (x-c)(a\cos\varphi - c) = 0.$$

En exprimant que cette droite passe par O, on a

$$\lambda = \frac{c - a\cos\varphi}{c\sin\varphi\cos\varphi}.$$

La droite a alors pour équation

$$x\sin\varphi(a\cos\varphi - c) - by\cos^2\varphi = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette droite est donc

$$m_3 = \frac{\sin\varphi}{b\cos^2\varphi}(a\cos\varphi - c). \qquad (5)$$

Le coefficient angulaire de la droite joignant le centre O au point d'intersection de la normale en M avec fg, a de même pour expression

$$m_4 = \frac{\sin\varphi}{b\cos^2\varphi}(a\cos\varphi + c). \qquad (6)$$

Si le faisceau défini par l'énoncé est harmonique, on doit avoir

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2m_1m_2 + 2m_3m_4,$$

relation qui est vérifiée immédiatement en y portant les valeurs (1), (2), (5) et (6).

Solution géométrique. Soient N, T les points de rencontre de Ff avec la normale et la tangente en M. Les points N, T, F, f constituent une division harmonique ; menons par ces points des perpendiculaires à MN et prenons les intersections de ces droites avec MF ; nous aurons une nouvelle division harmonique N′, M, F, f'. Les perpendiculaires élevées en ces points sur MF déterminent sur MN une nouvelle division harmonique C, M, G, g. (J. Neuberg).

Note. Monsieur L. Meurice nous communique la démonstration suivante, basée sur des considérations cinématiques très simples.

Représentons la vitesse de M sur la conique par un segment MK de la normale, ce qui suppose cette vitesse et ses composantes tournées de $\frac{1}{2}\pi$ autour de M. Soient H, h les projections de K sur MF, Mf ; MH et Mh

représenteront les vitesses de circulation du point M autour des foyers F, f. Les vitesses angulaires des droites FM, fM, ωM (ω est le centre de courbure en M) ayant pour expressions $\frac{MH}{MF}$, $\frac{M\lambda}{Mf}$, $\frac{MK}{M\omega}$, et ωM étant le bissectrice de l'angle FMf, on a

$$\frac{MK}{M\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{MH}{Mf}+\frac{M\lambda}{Mf}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{MK}{MG}+\frac{MK}{Mg}\right);$$

donc

$$\frac{1}{M\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{MG}+\frac{1}{Mg}\right),$$

et ω est le conjugué harmonique de M par rapport à Gg.

QUESTIONS D'EXAMEN.

569. Une sécante menée par le centre O d'une hyperbole rencontre la courbe en P, et les parallèles aux asymptotes menées par un point quelconque Q de la courbe en T, T'. Démontrer que $\overline{OP}^2 = OT \cdot OT'$.

(*Collège d'Aberystwyth.*)

A vérifier analytiquement en prenant pour axes les asymptotes ou OQ et le diamètre conjugué.

570. Soient PQ, P'Q' deux cordes parallèles d'une parabole. Le segment intercepté sur une tangente quelconque t par les tangentes menées en P et P' est égal à celui qu'interceptent sur t les tangentes menées en Q et Q'. (*Collège d'Aberystwyth.*)

A vérifier analytiquement en prenant pour axes le diamètre conjugué avec PQ, P'Q', et la tangente correspondante; calculer les différences des ordonnées des points de rencontre de t avec les tangentes en P, P' etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***855.** Si un nombre premier P n'est pas la somme de deux carrés, P^2 est la somme de trois carrés. (E. CATALAN.)

856. Soient M, M' deux points infiniment voisins, pris sur une courbe U; soit T le point d'intersection des tangentes menées en ces points. Si, au point M, les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ sont nulles, le rapport MT : M'T a pour limite n.

857. On considère les ellipses osculatrices à un cercle donné en un point donné de ce cercle, et ayant même aire que le cercle. Montrer que : 1° Le lieu du centre de ces ellipses est une ligne droite ; 2° l'enveloppe des axes est une parabole ; 3° le lieu des projections du point donné sur les axes est une cissoïde ; 4° le lieu des sommets est une courbe unicursale du 5e degré ; 5° le lieu des foyers est une strophoïde droite ; 6° la tangente à l'ellipse au second point de rencontre de l'ellipse et du cercle a pour enveloppe une hyperbole. (E. N. Barisien.)

858. Le lieu des points tels qu'en abaissant les quatre normales à une ellipse, la somme des carrés des six distances mutuelles des pieds des normales soit constante est une conique. Dans quel cas ce lieu se compose-t-il de lignes droites ? (E N. Barisien.)

859. Un cercle (C) coupe une conique (Σ) en quatre points. Par ces quatre points on fait passer une hyperbole équilatère (H). Quel que soit le cercle (C), le rapport des distances respectives du centre de (Σ) aux centres de (C) et de (H), est constant. (E. N. Barisien.)

×**860.** On divise les côtés BC, CA, AB d'un triangle, aux points A′, B′, C′ dans le rapport $m : n$, et les côtés du triangle A′B′C′, aux points A″, B″, C″, dans le rapport $n : m$. Démontrer 1° que les côtés du triangle A″B″C″ sont parallèles à ceux de ABC ; 2° que les droites AA″, BB″, CC″ sont les médianes de ABC. En opérant sur le triangle A″B″C″ comme sur le triangle ABC, et en continuant ainsi indéfiniment, trouver les limites des sommes $ABC + A''B''C'' + A^{IV}B^{IV}C^{IV} + \cdots$ et $AB + A''B'' + A^{IV}B^{IV} + \cdots$ (J. N.)

×**861.** On donne deux circonférences de rayons R, r. Quelle doit être la distance des deux centres pour qu'on puisse décrire une circonférence touchant les circonférences données, leur ligne des centres et une tangente commune ? (Déprez.)

×**862.** D'un point D pris sur une tangente DA à une circonférence donnée O, menez une sécante DBC de manière que la droite joignant les points de Brocard du triangle ABC soit perpendiculaire à BC. Démontrer que l'orthocentre du triangle est situé sur le diamètre DO et que l'aire du triangle est maximum. (Sollertinsky.)

×**863.** Dans tout triangle, le produit de la plus courte distance entre deux des cercles ex-inscrits et de leur plus grande distance est égal au carré du côté opposé à l'angle du triangle relatif au troisième cercle ex-inscrit. (E. N. Barisien.)

A PROPOS D'UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

par M. E. Cesáro, professeur à l'Université de Naples.

Comment M. Mandart a-t-il été conduit à se poser la *Question* 792 (p. 120)? Il est de la dernière évidence qu'il ne peut y avoir de courbe *dont les cercles de courbure passent par un point fixe*, parce que deux cercles consécutifs auraient en commun trois points, et, par suite, ils ne pourraient que coïncider, ainsi que tous les autres, en un cercle unique. Il est vrai que la courbe cherchée par M. Mandart devrait avoir, *si elle existait*, la normale polaire double du rayon de courbure; mais c'est justement la réciproque qui ne saurait avoir lieu, et la courbe trouvée à la p. 121 a la dernière propriété sans que, pour cela, les cercles osculateurs passent par un point fixe. Il faut remarquer, en effet, que l'enveloppe d'une série de courbes osculatrices à une courbe donnée est cette courbe elle-même, comptée deux ou plusieurs fois. On pourrait donc, en généralisant la *question* de M. Mandart, se demander quelle est la courbe *dont les cercles de courbure touchent une autre courbe donnée*, ou, plus généralement encore, quelle est la courbe qui est osculée en tous ses points par une série de courbes tangentes à une autre courbe; mais les remarques qui précèdent montrent clairement que de telles courbes ne peuvent exister.

Par des considérations analogues on constate l'impossibilité de trouver une courbe telle, que *les axes radicaux de ses cercles de courbure avec un cercle fixe passent par un point fixe*. L'axe radical de deux cercles osculateurs consécutifs est évidemment la tangente à la courbe. Si l'on se rappelle que les axes radicaux de trois cercles concourent en un point, on voit tout de suite que *l'axe radical du cercle de courbure avec un cercle fixe ne peut toucher son enveloppe ailleurs que sur la tangente à la courbe.* Donc, si l'axe dont il s'agit pouvait avoir un point fixe, c'est en ce point que devraient concourir toutes les tangentes à la courbe. Celle-ci se réduirait à un point.

Mais si l'on remplace les cercles osculateurs par des cercles tangents à la courbe, et dont les rayons soient *proportionnels aux rayons de courbure*, les impossibilités signalées précédemment disparaissent et l'on trouve des courbes très-intéressantes. Ainsi, pour répondre à la question posée par M. Mandart, il faut évidemment prendre les *spirales sinusoïdes* (N. A. M., 1888, p. 171).

Plus généralement, si l'on veut que l'axe radical du cercle considéré et d'un cercle fixe passe par un point fixe, on trouve, par des considérations de Géométrie élémentaire, que ces courbes possèdent dans leur plan un autre cercle, orthogonal au premier, ayant pour centre le point fixe, et tel que *le rayon de courbure en un point quelconque est proportionnel au segment que la polaire du même point, par rapport au cercle dont il s'agit, détermine sur la normale.* Ces courbes, qui comprennent comme cas particuliers les *coniques*, les *épicycloïdes*, etc., sont aussi caractérisées par la propriété suivante : le rayon vecteur, issu d'un certain point du plan, *partage dans un rapport constant le rayon de courbure de la développée.* Cela tient à ce que, dans la série des cercles tangents à une courbe quelconque, et proportionnels aux cercles osculateurs, l'axe radical de deux cercles consécutifs jouit précisément de la propriété de partager dans un rapport constant le rayon de courbure de la développée.

Tout cela peut se démontrer très aisément par les procédés *intrinsèques*, qui ont ici une supériorité incontestable sur ceux qu'on emploie habituellement. Ainsi, lorsqu'on met en équation le problème de M. Mandart, on est conduit à une équation différentielle, qui admet une intégrale étrangère à la question posée. En Géométrie intrinsèque, il faut tout simplement exprimer qu'il y a, sur la circonférence osculatrice $x^2 + y^2 = 2\rho y$, un point (x, y) satisfaisant aux conditions

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho},$$

nécessaires *et suffisantes* pour l'immobilité. On trouve immédiatement (en différentiant l'équation du cercle) $y\frac{d\rho}{ds} = 0$, c'est-à-dire que, si y n'est pas nul, ρ doit être constant. Si, au contraire, on part de l'équation $x^2 + y^2 = 2k\rho y$, on obtient

$$(k - 1)\, x = ky\frac{d\rho}{ds}.$$

Celle-ci est l'équation de l'axe radical du cercle considéré et du cercle analogue, construit en un point infiniment voisin. On voit que, comme nous l'avions annoncé, cette droite partage dans le rapport de k à $1 - 2k$ le rayon de courbure de la développée.

On peut traiter la même question en assujétissant la circonférence à

passer, non par un point fixe, mais par le centre de gravité de l'arc, compté à partir d'une origine fixe. Les coordonnées du centre de gravité doivent alors satisfaire aux équations(*).

$$\frac{d(xs)}{ds} = \frac{ys}{\rho} - s, \quad \frac{d(ys)}{ds} = -\frac{xs}{\rho},$$

et à la condition de s'annuler pour $s = 0$. On obtient donc, par différentiation de $x^2 + y^2 = 2k\rho y$,

$$(k-1)xs = ky\frac{d(\rho s)}{ds},$$

ou bien

$$(k-1)\rho s\frac{d(ys)}{ds} + kys\frac{d(\rho s)}{ds} = 0;$$

puis, en intégrant,

$$(\rho s)^k (ys)^{k-1} = a^{4k-2}$$

pourvu que $k \gtrless \frac{1}{2}$. Remarquons que, pour $k = 1$, il vient $\rho s = a^2$, équation d'une *clothoïde*. Pour cette courbe on a donc la propriété que tout arc, dont une extrémité est le point d'inflexion de la courbe, *a son centre de gravité sur la circonférence osculatrice* à l'autre extrémité.

Soit, dans le cas général, $\rho s = a^2 t$, de sorte que

$$ys = a^2 t^{-\frac{k}{k-1}}, \quad xs = -\rho\frac{dys}{ds} = \frac{ka^4}{(k-1)s}t^{-\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{dt}{ds}.$$

On a aussi

$$xs = \pm ys\sqrt{2k\frac{\rho}{y} - 1} = \pm a^2 t^{-\frac{k}{k-1}}\mathrm{T},$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{T} = \sqrt{2kt^{\frac{2k-1}{k-1}} - 1}.$$

Donc, si l'on représente par t_0 la valeur de t qui correspond à $s = 0$,

$$s^2 = \pm\frac{2ka^2}{k-1}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{T}}.$$

Quant à l'équation intrinsèque des courbes cherchées, il suffira, pour l'obtenir, d'éliminer t entre la dernière équation et $\rho s = a^2 t$; mais

(*) *Nouv. Annales de Math.*, 1886, p. 511.

LIBRARY

l'équation résultante ne pourra être écrite sous forme algébrico-logarithmique finie que pour les valeurs de k ayant la forme $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, n étant un nombre entier. On obtient ainsi les deux séries de valeurs de k :

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \cdots; \quad \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \cdots$$

Les courbes de la première série ne répondent pas à la question. Cela tient à ce que les circonférences de rayon $k\rho$ sont *trop petites* pour pouvoir passer constamment par les centres de gravité des arcs correspondants. En effet, remarquons d'abord que le rapport de y à x doit, pour $s = 0$, devenir nul. Il faut donc que T croisse indéfiniment. Il faut aussi que ys tende vers zéro. Donc

$$t_0^{\frac{2k-1}{1-k}} = 0, \quad t_0^{\frac{k}{1-k}} = 0.$$

Il s'ensuit que $2k - 1$ doit avoir même signe que k. Par conséquent $k > \frac{1}{2}$. On voit, en outre, que t_0 est nul ou infini suivant que k est inférieur ou supérieur à l'unité. Il en résulte qu'il faut toujours prendre le signe — dans la formule qui exprime le carré de l'arc, de sorte qu'on devra écrire

$$s^2 = \frac{2ka^2}{1-k}\int_0^t \frac{dt}{T}, \quad s^2 = \frac{2ka^2}{k-1}\int_t^\infty \frac{dt}{T},$$

suivant que $k < 1$ ou $k > 1$.

Discutons nos courbes aux environs de l'origine des arcs. Il faut d'abord chercher de quelle manière t tend vers zéro ou vers l'infini lorsque s tend vers zéro. On trouve, en employant la règle de l'Hospital,

$$\lim_{s=0} \frac{t^n}{s^2} = \frac{(1-k)n}{2ka^2} \lim t^{n-1} T;$$

puis, en remarquant que

$$\lim_{s=0} \frac{T}{t^{k-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2k},$$

et en prenant $n = \frac{1}{2(1-k)}$, on obtient

$$\lim_{s=0} \frac{t^n}{s^2} = \frac{(1-k)n}{\sqrt{2k}.a^2} \lim t^{n-\frac{1}{2(1-k)}} = \frac{1}{2\sqrt{2k}.a^2}.$$

On en déduit, au moyen de $\rho s = a^2 t$, que, dans le voisinage de l'origine des arcs, nos courbes tendent à se comporter comme si leur équation intrinsèque était

$$\rho = \alpha s^{3-4k}.$$

On a donc à l'origine une inflexion ou un rebroussement suivant que $k > \frac{3}{4}$ ou $k < \frac{3}{4}$. Les courbes qui répondent aux valeurs de k très voisines de $\frac{1}{2}$ ou de 1 tendent à se comporter respectivement comme une spirale logarithmique autour de son point asymptotique ou comme une clothoïde aux environs de son point d'inflexion. Il nous reste à constater que les coordonnées x et y sont nulles à l'origine. Remarquons, pour cela, que

$$\lim_{s=0} x = -a^2 \lim \frac{t^{\frac{k}{1-k}}}{s} \mathrm{T} = -a^2 \sqrt{2k} \lim \frac{t^n}{s},$$

c'est-à-dire $\lim x = -\frac{1}{2} \lim s = 0$. Quant à y, on sait déjà que son rapport à x tend vers zéro. Donc $\lim y = 0$.

Nous allons maintenant étudier le cas exceptionnel $k = \frac{3}{4}$. Les formules précédentes cessent d'avoir lieu, et l'on trouve

$$s^2 = 6a^2 (\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2} - t^2});$$

puis

$$s^2 + 36\rho^2 = \textit{constante}.$$

C'est l'équation d'une *épicycloïde étoilée* à deux rebroussements. Pour cette courbe on a donc la propriété que les circonférences osculatrices, réduites aux $\frac{3}{4}$, passent toutes par les centres de gravité des arcs comptés à partir d'un sommet. On en déduit, en particulier, cette curieuse propriété : *le centre de gravité d'une demi-boucle est au point de rebroussement qui la termine.* Du reste les formules établies précédemment montrent que les coordonnées du centre de gravité sont

$$x = \frac{\rho^2 s}{12a^4}(s^2 - 36\rho^2), \quad y = \frac{\rho^3 s^2}{a^4}.$$

Elles s'annulent simultanément pour $\rho = 0$ aussi bien que pour $s = 0$. On voit, en outre, que l'arc dont la longueur est

$$s = 6\rho = \sqrt{\tfrac{1}{2}(s^2 + 36\rho^2)} = a\sqrt{3\sqrt{6}}$$

a le centre de gravité sur la normale en son point extrême, autre que l'origine.

Enfin, dans le cas limite $k = \frac{1}{2}$, on trouve que ys doit être proportionnel à ρs. Il faut donc que l'on ait

$$y = m\rho, \quad x = -m\frac{\rho}{s}\frac{d\rho s}{ds},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{s}\frac{d\rho s}{ds} = \pm\sqrt{\frac{1}{m} - 1} = 2\alpha,$$

d'où

$$\rho = \alpha s + \frac{\beta}{s}.$$

Ces courbes, qui comprennent comme cas particuliers la *spirale logarithmique* et la *clothoïde*, sont caractérisées(*) par la propriété suivante : *le centre de gravité d'un arc quelconque appartient à la corde de l'arc correspondant d'une développoïde*, prise sous un angle dont le sinus est $\sqrt{m}$. Pour la clothoïde c'est la *développée* qu'il faut considérer, puisque $m = 1$. Le centre de gravité de tout arc de clothoïde est donc en ligne droite avec les centres de courbure aux extrémités. Dans notre problème on a $x = -2m\alpha\rho$, et il faut que x et y s'annulent avec s. Il faut donc et il suffit qu'on puisse en dire autant de ρ, et, par suite, que β soit nul. Donc $\rho = \alpha s$, équation d'une spirale logarithmique. Ainsi, le centre de gravité d'un arc de spirale, dont une extrémité est au point asymptotique, appartient à la circonférence décrite sur le rayon de courbure à l'autre extrémité, pris comme diamètre.

Voici, pour terminer, une intéressante remarque. Si l'on charge s^2 en $2as$ et ρs en $a\rho$, on obtient l'équation

$$s = \frac{k}{1-k}\int \frac{d\rho}{\sqrt{2k\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2k-1}{k-1}} - 1}},$$

qui caractérise les spirales sinusoïdes. Il y a donc(*), pour chacune de nos courbes, une spirale sinusoïde, dont le pôle marque sans cesse le centre de gravité d'un arc de la courbe considérée, lorsqu'on fait rouler la spirale sur cette courbe de manière que, par une contraction conti-

(*) *Rivista di Matematica*, 1892, p. 47.

nuelle de la courbe roulante, autour du point de contact, les deux lignes conservent entre elles un contact du second ordre. C'est ainsi qu'on obtient pour la clothoïde ($k = 1$) un cercle, pour la spirale logarithmique ($k = \frac{1}{2}$) une autre spirale logarithmique, pour l'épicycloïde étoilée à deux rebroussements ($k = \frac{1}{4}$) une cardioïde, etc. Dans les cas particuliers $k = \frac{2}{3}$ et $k = \frac{3}{2}$ on trouve aussi deux courbes connues, à savoir une parallèle à une épicicloïde, donc l'origine des arcs est un point de rebroussement, et une lemniscate de Bernoulli, dont le point double doit, à l'instant initial, coïncider avec l'origine des arcs de la courbe donnée. On s'explique tout cela en observant que les conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées x, y, du centre de gravité, peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{d\frac{xs}{a}}{d\frac{s^2}{2a}} = \frac{\frac{ys}{a}}{\frac{\rho s}{a}} - 1, \qquad \frac{d\frac{ys}{a}}{d\frac{s^2}{2a}} = -\frac{\frac{xs}{a}}{\frac{\rho s}{a}}.$$

Elles expriment dès lors l'immobilité du point $\left(\frac{xs}{a}, \frac{ys}{a}\right)$ dans le plan de la courbe dont l'arc et le rayon de courbure sont $\frac{s^2}{2a}$ et $\frac{\rho s}{a}$. Pour amener le dernier point dans la position (x, y) il faut que le plan de la courbe roulante se contracte continuellement, autour du point de contact, dans le rapport $\frac{a}{s}$. Cela rend le rayon de courbure $\frac{\rho s}{a}$ égal à ρ, et l'élément d'arc $\frac{sds}{a}$ égal à ds. C'est à la première circonstance qu'on doit la *conservation de l'ordre* du contact. On doit à la seconde le *roulement pur* d'une courbe sur l'autre. Nous aurions pu utiliser ces remarques pour déduire immédiatement l'équation intrinsèque de nos lignes de celle des spirales sinusoïdes, après avoir rappelé que, pour ces dernières lignes, la circonférence $x^2 + y^2 = 2k\rho y$ passe par le pôle, qui, pour $k \geqq \frac{1}{2}$, est un point de la courbe.

*RÉCRÉATIONS ET PIÈGES MATHÉMATIQUES(*).

« Les matières de Géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre plus divertissantes. » (PASCAL.)

1. Une ficelle a 30 m. de long; chaque jour, d'un coup de ciseau, on en coupe un mètre. Dans combien de jours aura-t-on fini ?

2. Un escargot grimpant le long d'un poteau de 12 mètres fait 3 mètres le jour et redescend 2 mètres la nuit. Quand atteindra-t-il le sommet?

3. Le 26 mai 1876, l'âge de Louis était les $\frac{88}{74}$ de l'âge de son frère Jean. Le 26 juillet suivant, il n'en était plus que les $\frac{7}{9}$. Trouver la date de la naissance de chacun d'eux.

4. Une brebis, un agneau et deux lapins mangeraient l'herbe d'un enclos, la première en 30 jours, le 2e en 45 jours et les deux derniers en 90 jours, si cette herbe ne poussait pas; mais l'herbe se renouvellerait en 60 jours. Dans combien de jours, l'herbe de l'enclos sera-t-elle épuisée ?

5. Un arabe laisse à ses trois fils 17 chameaux. Le premier doit en avoir la moitié, le second le tiers et le troisième le neuvième. Comment répartir les 17 chameaux ?

Le cadi appelé arrive monté sur son chameau, il y a alors 18 chameaux; le premier des frères en reçoit 9, le deuxième 6 et le troisième 2. Le cadi remonte sur son propre chameau et rentre sous sa tente.

6. Dans une cage de lapins et de faisans, il y a en tout 35 têtes et 94 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

7. Une montre à trois aiguilles marque deux heures; à quelle heure l'aiguille des secondes sera-t-elle bissectrice de l'angle des deux autres ? Les pointes des trois aiguilles (supposées concentriques et de même longueur) peuvent-elles former un triange équilatéral ?

8. On attache une chèvre à un poteau dans une prairie par une corde dont la longueur est telle que la chèvre trouve à se nourrir pendant un jour. Quelle longueur faut-il donner à cette corde le 2e jour, le 3e jour, etc. ?

On fait abstraction de l'herbe qui repousse.

(*) Presque toutes les récréations sont tirées de l'ouvrage de M. Rebière « Mathématiques et Mathématiciens ». La 10e nous a été communiquée par M. L. Meurice.

9. Établir une addition composée de tous les neuf premiers chiffres sans les répéter et sans employer le zéro, de façon que le total soit 100.

Réponse $74+25+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}$.

10. Joseph Vinot (et avant lui Ozanam) a publié dans ses « Récréations mathématiques » la question suivante sous le titre « Un cent de piquet sans cartes ».

Au jeu le premier joueur énonce un nombre inférieur à 11; le 2d y ajoute un nombre également inférieur à 11; le 1er ajoute au résultat un nombre inférieur à 11, et ainsi de suite. La partie est gagnée par celui qui arrive au nombre 100.

Pour *s'assurer* la victoire à ce jeu, il suffit de s'emparer des nombres 1, 12, 23, 34, ... 89, 100.

Plus généralement, supposons qu'il s'agisse d'arriver au nombre N en ajoutant des nombres inférieurs à n. Soit $N = nq + r$. Le premier joueur s'assure la victoire s'il choisit comme premier nombre r; car il peut faire en sorte qu'il énonce successivement les nombres $r+n$, $r+2n$,...

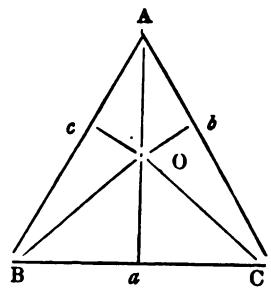
11. *Tous les nombres sont égaux entre eux.* Soient a et b deux nombres quelconques ayant c pour différence. Alors $a - b = c$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $a - b$. Il vient successivement

$$a^2 - ab - ab + b^2 = ac - bc, \quad a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc,$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Divisant les deux nombres par $a - b - c$, on a $a = b$. Donc les deux nombres a, b sont égaux entre eux (Laisant et Perrin, *Algèbre*, p. 312).

12. *Tous les triangles sont isocèles.* Considérons, dans le triangle ABC, la bissectrice AO de l'angle A, et la perpendiculaire aO au milieu du côté BC (médiatrice de BC). Si la bissectrice est perpendiculaire sur le côté BC, on sait qu'elle se confond avec aO et que AB = AC (Legendre, I, 11). Si la bissectrice n'est pas perpendiculaire sur le côté BC, du point O, où elle rencontre la médiatrice aO, abaissons les perpendiculaires Ob et Oc respectivement sur AC et AB. Les triangles A$O b$, A$O c$ sont égaux, comme triangles rectangles ayant l'hypoténuse AO commune et les angles aigus OAb, OAc égaux; donc $Ab = Ac$ (1) et $Ob = Oc$.



Les triangles rectangles aOB, aOC sont égaux comme ayant les angles droits en a compris entre côtés égaux, savoir : Oa commun et $aB = aC$. Donc $OB = OC$. Enfin les triangles rectangles ObC, OBc sont égaux comme ayant leurs hypoténuses OC, OB égales et les côtés Ob, Oc égaux. Il en résulte $bC = cB$ (2). Des relations (1) et (2), on déduit

$$Ab + bC = Ac + cB,$$

c'est-à-dire $AC = AB$. Donc *tous les triangles sont isoscèles.*

NOTES MATHÉMATIQUES.

22. *Sur les cercles osculateurs* (Voir *Mathesis*, pp. 120 et 140). M. E. Cesaro avait déjà signalé dans ce journal le théorème suivant : *Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant.*

Le question 670 (voir *Mathesis* (1), IX, p. 280; (2), I, p. 168), qui énonce cette proposition et pose la question analogue relative aux sphères osculatrices d'une courbe gauche, a été traitée par M. Jamet.

23. *Sur les quadriques homofocales.* — La propriété des coniques homofocales, énoncée dans le dernier n° de *Mathesis*, p. 150, a son analogue dans les quadriques homofocales (*Salmon-Chemin*, § 193). Voici une démonstration géométrique du théorème relatif aux surfaces du second ordre.

Soit U une surface du système homofocal, et soient P le pôle d'un plan π par rapport à U, Q la projection de P sur π, S l'intersection de π avec le diamètre conjugué OP; d'après un théorème connu, Q est le point de contact de π avec une surface U′ du système homofocal. Si le plan π se déplace parallèlement à lui-même, les points P et S décrivent deux ponctuelles projectives et le plan PQS reste fixe; donc les droites PQ, SQ se correspondent dans deux faisceaux parallèles projectifs, et leur point d'intersection décrit une conique passant par les centres de ces faisceaux, c'est-à-dire une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux droites PQ, SQ. (Cl. Servais.)

Pour établir une théorie des quadriques homofocales, on peut prendre pour point de départ la proposition suivante : *Soit* P *le pôle d'un plan* π *par rapport à une quadrique* U, *et soit* p *la perpendiculaire abaissée de* P *sur* π. *Les traces de* p *et* π *sur un plan principal de* U *sont dans la*

relation de pôle et polaire par rapport à une conique fixe. Ce théorème se démontre à l'aide d'un calcul facile. Si x, y, z sont les coordonnées de P, et si $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ est l'équation de U, les équations de π et p sont

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1, \quad \frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z};$$

les traces de π et p sur le plan xy sont définies par

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1, \quad X=\frac{x(a^2-c^2)}{a^2} \text{ et } Y=\frac{y(b^2-c^2)}{b^2};$$

la première est la polaire de la seconde par rapport à la conique

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1.$$

Le théorème est donc démontré. On voit aussi que les coniques par rapport auxquelles les traces de p et π sur un plan principal de U sont dans la relation de pôle et polaire, sont les mêmes pour toutes les quadriques comprises dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

où λ est un paramètre variable.

Les pôles de π par rapport à ces quadriques sont situés sur une même droite p (*Salmon-Chemin*, § 167); car d'après le théorème établi ci-dessus, les perpendiculaires abaissées de ces pôles sur π rencontrent les plans principaux aux mêmes points.

Le point de rencontre de p avec π est le pôle de π par rapport à l'une des surfaces (A); c'est, évidemment, le point de contact de π avec cette surface. C'est là la propriété dont M. Servais s'est servi ci-dessus. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS D'EXAMEN.

Concours de l'École Polytechnique de Paris en 1893.

(Voir *Mathesis*, p. 139.)

I. *Étant donnés un plan π et deux sphères* S, S' *de rayons* R *et* R', *ayant leurs centres dans ce plan, on considère une sphère variable* Σ, *tangente aux deux premières et au plan. On demande :*

1° le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné.
2° le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.

Soient O, O', O'' les centres des sphères S, S', Σ, et A, B, P les points de contact de Σ avec S, S' et le plan donné π.

1° Si les sphères S et S' sont extérieures, tangentes extérieurement ou sécantes, elles touchent Σ de la même manière ; A et B sont des points antihomologues de S et S', c'est-à-dire que la droite AB passe par le centre de similitude externe T des sphères S, S' et le produit TA. TB est constant. Mais $\overline{TP}^2 = TA.TB$; donc le lieu de P est la circonférence par rapport à laquelle les sections des sphères S, S' par le plan π sont des lignes inverses.

On ne peut supposer les contacts de S et S' avec Σ d'espèces différentes; car la sphère Σ traverserait le plan π. Si les sphères S, S' sont tangentes intérieurement ou intérieures l'une à l'autre, leurs contacts avec Σ sont d'espèces différentes, et le lieu de P est une circonférence ayant pour centre le centre de similitude interne de S et S'.

2° Prolongeons O''P de PQ = R, et par O menons un plan π' parallèle à π. O'' est à égale distance du point O et du plan π' ; par suite, il appartient à un paraboloïde de révolution ayant pour foyer O, pour plan directeur le plan π'. Si l'on prend deux axes rectangulaires dans le plan π et un troisième perpendiculaire à ce plan, et que l'on désigne par $(\alpha, \beta, 0)$ les coordonnées de O, par (x, y, z) celles de O'', la condition O''Q = O''O s'exprime par l'équation

$$z + R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2}.$$

De même

$$z + R' = \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + z^2}.$$

Retranchant ces équations l'une de l'autre après avoir élevé les deux membres au carré, on obtient

$$(\alpha-\alpha')\left(x - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) + (\beta-\beta')\left(y - \frac{\beta+\beta'}{2}\right) + (R-R')\left(z + \frac{R+R'}{2}\right) = 0.$$

Pour simplifier, faisons passer l'axe des x par O et O', de manière que $\beta = 0$, $\beta' = 0$; l'équation précédente se réduira à

$$(\alpha-\alpha')\left(x - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) + (R-R')\left(z + \frac{R+R'}{2}\right) = 0.$$

On en conclut que le lieu de O'' est une ellipse située dans un plan perpendiculaire à celui qui est mené par la droite OO' perpendiculairement à π; la trace de ce plan sur le plan xz passe par le point $x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$, $z = -\frac{R + R'}{2}$ et a pour coefficient angulaire $-\frac{\alpha - \alpha'}{R - R'}$.

Nous avons supposé la sphère Σ située au-dessus du plan P. Une seconde conique, symétrique de la précédente par rapport au plan P, correspond aux sphères Σ situées au-dessous du plan P.

Les deux coniques ont pour projection horizontale la circonférence décrite par le point P.

II. *On donne deux sphères de centres* C, C' *et un cône de révolution de sommet* O, *dont l'axe est perpendiculaire au plan* COC'; *le triangle* COC' *est rectangle en* O. *On demande :*

1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données;

2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle COC' *devient isoscèle, où les sphères données sont égales et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.*

Prenons pour axes les droites OC, OC' et l'axe du cône, et soient $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$, (x, y, z) les coordonnées des centres C, C', C'' des trois sphères.

1° On trouve d'abord les égalités

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 = (R + R'')^2, \qquad (1)$$

$$x^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = (R' + R'')^2, \qquad (2)$$

en exprimant que les distances C''C, C''C' sont égales aux sommes des rayons des sphères correspondantes.

Soit OL la génératrice du cône située dans le plan OzC'', et soit Ox' la trace de ce plan sur le plan xy. Si l'on rapporte, pour un moment, OL et C'' aux axes de coordonnées Ox', Oz, et qu'on désigne par δ l'angle LOz, l'équation de OL est $x' \cos\delta - z \sin\delta = 0$; en exprimant que la distance de C'' à cette droite est égale à R'', on trouve

$$x' \cos\delta - z \sin\delta = R'',$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cos\delta - z \sin\delta = R''. \qquad (3)$$

Eliminons R'' entre les équations (1), (2) et (3); il vient

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=(\sqrt{x^2+y^2}\cos\delta-z\sin\delta+R)^2,$$
$$x^2+(y-\beta)^2+2^2=(\sqrt{x^2+y^2}\cos\delta-z\sin\delta+R')^2.$$

Telles sont les équations du lieu du centre de la sphère variable.

2° Supposons OC = OC', R = R'. Le centre C'' se trouve évidemment dans le plan σ mené par O perpendiculairement à CC', et le contact de la sphère variable avec le cône a lieu sur une génératrice fixe OL.

Menons un plan σ' parallèle au plan qui touche le cône suivant OL, à la distance R. C'' étant à égale distance de ce plan et du point C, il appartient à un paraboloïde de révolution ayant pour foyer O, pour plan directeur σ'. Le plan σ rencontre ce paraboloïde suivant une parabole, qui est le lieu du centre de la sphère variable(*). (J. N.)

Concours pour l'admission à Saint-Cyr, 1893.

I. *On donne un triangle* ABC *et, dans l'espace, une droite indéfinie* X'AX *passant par* A *et faisant avec* AB *et* AC *les angles* β, γ. *Un point* M *se meut sur la droite* X'AX. *Étudier la variation du rapport* $\frac{MB}{MC}$. — *Montrer que les positions remarquables du point* M *sont les points de rencontre de la droite* X'AX *avec la sphère qui a son centre sur cette droite et qui passe par les points* B *et* C.

Si l'on fait AM = x, AB = b, AC = c, le rapport à étudier est

$$\lambda^2=\frac{x^2-2bx\cos\beta+b^2}{x^2-2cx\cos\gamma+c^2}.$$

Cette expression convient aux points de AX et à ceux de AX' pourvu que l'on donne à x le signe + ou le signe —.

Pour simplifier la discussion, nous substituons au triangle donné ABC le triangle qui pour base BC et pour sommet le point de rencontre A' de la droite XX' avec le plan perpendiculaire au milieu de BC. Appelons encore β et γ les angles XA'B, XA'C et faisons A'B = A'C = m; la quantité à discuter devient

$$\lambda^2=\frac{x^2-2mx\cos\beta+m^2}{x^2-2mx\cos\gamma+m^2}. \qquad (1)$$

(*) Le J. M. S. a publié récemment une solution des mêmes questions.

L'égalité (1) peut prendre la forme

$$(\lambda^2 - 1)x^2 - 2m(\lambda^2 \cos\gamma - \cos\beta)x + (\lambda^2 - 1)m^2 = 0. \qquad (2)$$

On voit qu'à une même valeur de λ correspondent deux valeurs de x dont le produit est égal à m^2, c'est-à-dire deux points M, M' tels que $A'M.\,A'M' = m^2$.

L'équation (2) donne

$$x = m\,\frac{\lambda^2\cos\gamma - \cos\beta \pm \sqrt{-\lambda^4\sin^2\gamma - \sin^2\beta + 2\lambda^2(1 - \cos\gamma\cos\beta)}}{\lambda^2 - 1}.$$

Pour que x soit réel, λ^2 doit être compris entre les racines de l'équation

$$\lambda^4\sin^2\gamma - 2\lambda^2(1 - \cos\gamma\cos\beta) + \sin^2\beta = 0.$$

On en conclut un minimum et un maximum de λ^2, donnés par

$$\lambda_1^2 = \frac{1 + \cos\beta}{1 + \cos\gamma}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\gamma},$$

si $\beta > \gamma$. Les racines de l'équation (2) étant égales entre elles pour $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$, les points de XX' qui correspondent au minimum ou au maximum de λ^2 sont les points μ, μ' situés à la distance m de A'; pour $\lambda = \lambda_1$ on obtient $x = -m$, etc.

Cela posé, lorsque M parcourt la droite indéfinie X'X dans le sens X'X, λ décroît de 1 à λ_1 sur le segment X'μ, croît de λ_1 à 1 sur μA', croît de 1 à λ_2 sur A'μ', enfin décroît de λ_2 à 1 sur μ'X.

On peut observer que les points B, C, μ, μ', sont sur une même sphère de centre A'.

On arrive aux mêmes conclusions en considérant le lieu d'un point M dont les distances à B et C sont dans un rapport donné (λ : 1). Ce lieu est la sphère qui a pour extrémités d'un même diamètre les points D, D' qui divisent BC harmoniquement dans le rapport donné. Si $\lambda > 1$, le rapport des distances de B et C à un point extérieur à cette sphère est plus petit que λ; pour un point intérieur, le rapport est plus grand que λ. Si l'on fait croître λ à partir de l'unité, on obtient des segments successifs DD' qui comprennent l'un l'autre, et les sphères successives sont chacune intérieure à la précédente. Ces sphères déterminent sur X'X des couples de points M, M' tels que les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{M'A}{M'B}$ sont égaux à la valeur correspondante de λ. Le maximum de λ a lieu pour la sphère

touchant X'X. Comme le produit des distances du milieu de BC aux points D, D' a une valeur constante, les sphères considérées ont pour plan radical commun le plan perpendiculaire au milieu de BC; par suite, le produit A'M.A'M' est constant(*). La sphère tangente à X'X a donc son point de contact situé à la distance A'B de A'. Les valeurs de λ inférieures à l'unité donnent lieu à une discussion analogue à la précédente(**).

II. *On connaît dans un triangle le côté a, l'angle* A *et le produit* $b(b+c)=k^2$ *; calculer b et c. Discussion. Construire, sans calcul, le triangle.*

Éliminant c entre les équations

$$b(b+c)=k^2, \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

on trouve

$$4\cos^2\frac{A}{2}b^4-\left(4k^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\right)b^2+k^4=0. \qquad (1)$$

Cette équation donne deux valeurs réelles de b^2 si

$$\left(4k^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\right)^2\geqq 16k^4\cos^2\frac{A}{2};$$

d'où, en extrayant les racines carrés des deux membres,

$$a^2\geqq 4k^2\cos\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{A}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \geqq 8k^2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}.$$

Supposons cette condition remplie. Les deux valeurs de b^2 seront positives; comme $bc=k^2-b^2$, elles doivent, pour satisfaire au problème, être inférieures à k^2.

Le problème n'a qu'une seule solution si le premier membre de (1) a des signes contraires pour $b=0$ et $b=k^2$; la substitution $b=k^2$ doit donc donner un résultat négatif, ce qui conduit à l'inégalité $k^2<a^2$.

Si $k^2>a^2$, les deux valeurs de b^2 sont inférieures à k^2 ou supérieures à k^2; par suite, leur demi-somme est, respectivement, inférieure ou supé-

---

(*) Comme les points D, D' peuvent se réunir en C ou B, on a $A'M.A'M'=\overline{A'C}^2=\overline{A'B}^2$.

(**) Comparer les solutions qui ont paru dans le n° du 1er juillet du *Journal de Vuibert* et dans le n° du 15 juillet du J. M. E. de M. de Longchamps.

rieure à k^2. Donc le problème admet deux solutions ou est impossible suivant que $k^2 \gtrless a^2 : 4\cos^2\frac{A}{2}$.

Pour construire le triangle, prolongeons BA de AD = AC. L'angle CAD étant donné, on connaît le rapport $\frac{CD}{AC}$; donc le produit

$$DB \cdot DC = DB \cdot AC \cdot \frac{CD}{AC} = k^2 \cdot \frac{CD}{AC}$$

est connu. Ainsi, dans le triangle DBC on connaît la base BC, le produit des deux autres côtés et l'angle $BDC = \frac{1}{2}A$; on est donc ramené à un problème connu.

LE COMITÉ LOBATCHEFSKY.

L'appel du comité Lobatchefsky de Kasan a été entendu. Un grand nombre de géomètres russes et étrangers ont consenti à faire partie de ce comité comme membres d'honneur (*). Nous en donnons ci-dessous la liste abrégée. A cette occasion, nous signalerons une petite erreur qui s'est glissée dans le texte de la circulaire publiée en mai dernier. C'est le 2 novembre 1893 et non le 22 octobre que tombe le centième anniversaire de la naissance de Lobatchefsky.

Les œuvres géométriques complètes de Lobatchefsky ont été publiées il y a quelques années, et comprennent deux tomes (**):

Vol. I. *Œuvres en langue russe.* Les principes de la géométrie, 1-70. — Géométrie imaginaire, 71-121. — Application de la géométrie imaginaire à l'évaluation des intégrales, 121-219. — Nouveaux principes de la géométrie, avec la théorie complète des parallèles, 219-487. — Pangéométrie, 487-550.

Vol. II. *Œuvres en langue française et allemande* (avec le portrait de N. I. Lobatchefsky). — Notice biographique. — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 553-578. — Géométrie imaginaire, 579-614. — Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, 614-680. — Liste des ouvrages qui ont rapport à la géométrie non-euclidienne (I-XX).

(*) Le nombre et l'importance des adhésions feront sans doute réfléchir ceux qui pensent que la géométrie euclidienne est le seul système possible de géométrie et qu'elle est certainement réalisée dans le monde physique.

(**) En vente à la Société Physico-mathématique de Kasan. Prix du premier volume, 5 roubles; prix du second, 3 roubles. Les deux volumes ensemble 6 roubles, environ 15 francs. Le nombre des exemplaires est très restreint.

MEMBRES D'HONNEUR DU COMITÉ.

Alexeief, V. G. (Moscou). — Andreief, K. A. (Kharkof). — Anissimof, V. A. (Varsovie). — Battaglini, G. (Naples). — Beltrami, E. (Rome). — Bobynine, V. V. (Moscou). — Boucreief, B. I. (Kief). — Bougaief, N. W. (Moscou). — Cayley, A. (Cambridge). — Cesaro, E. (Naples). — Darboux, G. (Paris). — Dolbnia, I. P. (Nijni-Novogorod). — Durège, H. (Prague). — Dyck, W. (Munich). — Engelhardt, W. P. (Dresde). — Erdmann, B. (Halle). — Escherich, G. (Vienne). — Fedorof, E. S. (St-Pétersbourg). — Flye de St. Marie, C. (Paris). — Frischauf, I. (Gratz). — de Galdeano, Z. G. (Saragosse). — Gesechus, N. (St-Pétersbourg). — Groth, N. I. (Moscou). — Guccia, I. B. (Palerme). — Günther, S. (Munich). — Halsted, G. B. (Austin, Texas). — Helmholtz (von), H. (Charlottenbourg). — Hermite, Ch. (Paris). — Ianichefsky, E. P. (Kasan). — Iarochenko, S. P. (Odessa). — Joukofsky, N. E. (Moscou). — Killing, W. (Münster). — Kirpitchef, W. L. (Kharkof). — Klein, F. (Göttingen). — Kneser, A. (Dorpat). — Korkine, A. N. (St-Pétersbourg). — Kovalsky, M. F. (Kharkof). — Lachtine, L. K. (Dorpat). — Lampe, E. (Berlin). — Liapunof, A. M. (Kharkof). — Lie, S. (Leipsig). — Liebmann, O. (Bonn). — Liguine, W. N. (Odessa). — Lindemann, Ed. (Poulkova). — Lindemann, F. (Königsberg). — Lipschitz, R. (Bonn). — Loria, G. (Gênes). — Lüroth, J. (Fribourg). — Macfarlane, A. (Austin, Texas). — Makarof, A.N. (St-Pétersbourg). — Mansion, P. (Gand). — Markof, A. A. (St-Pétersbourg). — Mehmke, R. (Darmstadt). — Mittag-Leffler, G (Stockholm). — Mlodziiewski, B. K. (Moscou). — Moore, E. H. (Chicago). — Neovius, E. R. (Helsingfors). — Newcomb, S. (Baltimore). — d'Ovidio, E. (Turin). — Pasch, M. (Giessen). — Peano, G. (Turin). — Perott, I. (Worcester, Massachussets). — Pervouchine, I. M., Prêtre, district de Chadrinsk (gouvern. de Perm). — Poincaré, H. (Paris). — Pokrovsky, P. M. (Kief). — Poretsky, P. S., Astronome à Gerodnia (gouvernement de Tchernigof). — Posse, H. A. (St-Pétersbourg). — Potapof, N. G. (Kasan). — Pouchta, A. (Czernovitz). — Preobragensky, P. W. (Moscou). — Ptaschitzky, L. (St-Pétersbourg). — Rakhmaninof, I. I. (Kief). — Reye, Th. (Strasbourg). — Schapira, H. (Heidelberg). — Schering, E. (Göttingen). — Schiff, P. A. (St-Pétersbourg). — Madame Schiff, V. I., Professeur à l'École supérieure de femmes (St-Pétersbourg). — Schiller, N. N. (Kief). — Schlegel, V. (Hagen). — Schoute, P. H. (Groningue). — Schur, F. (Aix-la-Chapelle). — Segre, C. (Turin). — Selivanof, D. F. (St-Pétersbourg). — Sichstel, V. A. (Orenbourg). — Slechinski, I. V. (Odessa). — Sloudsky, F. A. (Moscou). — Sokhotzki, I. W. (St-Pétersbourg). — Sonine, N. I. (Varsovie). — Souslof, G. K. (Kief). — Stebnitsky, J. I., Chef de section géodésique de l'État Général (St-Pétersbourg). — Stoletof, A. G. (Moscou). — Stringham, I. (Berkeley, Californie). — Sylvester, J. J. (Oxford). — Tchebychef, P. L. (St-Pétersbourg). — Tchekhovitch, K. A., Inspecteur (Orenbourg). — Teixeira, G. (Oporto). — Tikhomandritsky, M. A. (Kharkof). — Tillo, A. A. (St-Pétersbourg). — De Tilly, I. M., Commandant de l'École militaire (Bruxelles). — Timé, I. A. (St-Pétersbourg). — Veronese, G. (Padoue). — Vorochilof, K. V. (Kasan). — Weyr, Ed. (Prague). — Wvedensky, A. I. (St-Pétersbourg). — Zinger, V. I. (Moscou). — Zinine, N. N. (Varsovie).

BUREAU DU COMITÉ.

Le Président de la Société Physico-mathématique à l'Université Impériale de Kasan, A. V. Vassilief, Professeur.
Le Vice-Président de la Société Physico-mathématique, F. M. Souvorof, Professeur.
Bechteref, V. M., Professeur à l'Université, Président de la Société Nevropathologique.
Goldhammer, D. A., Professeur à l'Université.
Imchenik, I. A., Directeur du Gymnase.
Isnoskof, I. A., Directeur de l'École Réale.
Jbikofsky, A. K., Dr., Professeur émérite du Gymnase.
Kotelnikof, A. P., Agrégé de l'Université.
Nasimof, P. S., Professeur à l'Université.
Porfirief, N. I., Agrégé de l'Université.
Sintzof, D. M., Maître de mathématiques.
Slouginof, N. P., Professeur à l'Université.
Smirnof, A. I., Professeur à l'Université.

Les souscriptions sont reçues jusqu'au 2 mai 1894, à l'adresse suivante : Kasan, Société Physico-mathématique.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'arithmétique à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (2e *série*) et au baccalauréat de l'enseignement moderne (3e *série*) et des candidats à l'institut agronomique, avec des compléments destinés aux candidats aux grandes écoles du gouvernement, par E. HUMBERT, ancien élève de l'École normale supérieure, Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, et une Préface de Jules Tannery, Directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. Paris, Nony et Cie (in-8°, de 478 pages). Prix : 5 francs.

Nous ne pouvons donner une meilleure idée du livre de M. E. Humbert qu'en transcrivant la majeure partie de la préface de M. J. Tannery, puis la table des matières. Nous ferons ensuite quelques observations critiques.

« Il y a plaisir à voir un professeur de mathématiques spéciales, aussi distingué que M. H., écrire un traité d'Arithmétique, quand l'Arithmétique ne figure plus sur les programmes des examens auxquels ses élèves se préparent : pourtant il pensait peut-être encore à ses élèves en l'écrivant : il arrive plus d'une fois qu'un étudiant, déjà avancé, déjà rompu au mécanisme du calcul, est arrêté parce qu'il n'a pas suffisamment réfléchi au sens des opérations fondamentales, ni à tout ce que contient l'idée de nombre. S'il s'en aperçoit, il est sauvé, et le temps qu'il passera à lire un livre comme celui de M. Humbert ne sera pas perdu pour la suite de ses

études, et même pour ses examens : la clarté dans laquelle il verra les éléments se projettera, à son grand étonnement, sur bien des parties de la science qui étaient restées pour lui dans la brume. Et si quelqu'une de ces belles propriétés des nombres que développe l'auteur, et qui donnent accès dans les parties élevées de l'Arithmétique l'émerveillent, l'attirent, et lui donnent le désir d'en savoir davantage, qu'il se réjouisse : je crois bien qu'il n'y a pas de mathématicien véritable qui n'ait ressenti cette curiosité et cette passion.

« Sur divers points, le livre de M. Humbert se distingue nettement des ouvrages écrits sur la même matière.

« Dès le début, à propos de la soustraction, M. Humbert introduit le nombre entier *négatif*. Disons de suite que tout ce qui concerne ces nombres est imprimé en petits caractères et n'importe aucunement à l'intelligence des théories fondamentales de l'Arithmétique, que l'auteur a exposées de la façon la plus élémentaire possible : tout ce qui est imprimé en gros caractères peut être lu sans qu'on soit obligé de recourir au reste, en sorte que le livre de M. Humbert s'adresse aussi bien à des élèves de troisième, qu'à des élèves de mathématiques élémentaires. J'ai entendu soutenir à de très bons esprits la convenance d'introduire ainsi les nombres négatifs en Arithmétique : l'Algèbre dès lors a un domaine nettement limité : c'est la théorie des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables. Au point de vue logique, cette façon de présenter les choses me paraît être la meilleure; au point de vue pédagogique, l'expérience seule peut la juger. Dans un livre, en tous cas, cette tentative ne présente aucun danger; dans l'enseignement, son succès est, à ce que je crois, une affaire de mesure, et il me semble qu'elle peut parfaitement réussir avec des élèves de mathématiques élémentaires, qui revoient l'Arithmétique, et qui sont déjà initiés à l'Algèbre. Quant aux avantages qu'elle présente, ils sont assez évidents pour qu'on me dispense d'y insister. M. Humbert a introduit les nombres négatifs en partant de ce qu'on a appellé de l'autre côté du Rhin, le *principe de permanence*. Il n'y met, bien entendu, aucun pédantisme. La démonstration imagée qu'il emploie pour établir la propriété fondamentale des sommes algébriques a le grand avantage d'être courte et générale.

« Pour ce qui concerne les opérations fondamentales de l'Arithmétique, M. Humbert, suivant en cela beaucoup d'auteurs, place d'ordinaire après la théorie de l'opération les propriétés essentielles qui résultent de la définition : il me semble que l'ordre inverse serait préférable : c'est sur ces propositions surtout qu'il convient d'appeler l'attention du lecteur, et, d'ailleurs, elles éclairent l'opération elle-même, qui n'est qu'un mécanisme de calcul dont, à la vérité, il importe de se rendre compte.

« On a pris l'habitude d'enseigner la théorie de la divisibilité en l'appuyant sur celle du plus grand commun diviseur; l'auteur respecte cet ordre, qui est excellent; mais il a tenu à montrer qu'il n'est pas indispensable, et a reproduit la démonstration directe que Gauss a donnée de cette proposition : Un nombre premier ne peut diviser un produit de deux facteurs sans diviser l'un d'eux.

« Dans la plupart des ouvrages élémentaires, l'introduction de l'idée de fraction n'est pas faite avec la clarté désirable, et on ne sait pas toujours très bien si l'on

raisonne sur un nombre ou sur une grandeur. S'il s'agit de nombres, que signifient ces mots : rendre une fraction trois fois plus grande, trois fois plus petite ? Qu'est-ce même que deux fractions égales ? M. Humbert a pris là-dessus très nettement position : deux fractions sont égales, si elles peuvent servir à mesurer la même longueur : et, de même, pour l'addition, la soustraction, c'est l'idée d'addition, ou de soutraction des longueurs qu'il prend pour point de départ; pour la multiplication, c'est le théorème sur l'aire du rectangle; les démonstrations qu'il donne sont très claires et très bien adaptées à l'enseignement.

« Il est aussi légitime, à mon avis, après avoir rattaché, comme il me paraît nécessaire dans l'enseignement, l'idée de fraction à la mesure de la plus simple des grandeurs continues, de la détacher de son origine concrète pour définir abstraitement l'égalité et les opérations fondamentales : ce qui n'est pas légitime, c'est de rester dans le vague.

« Je ne connais rien de plus insupportable en mathématiques que les nombres irrationnels; leur introduction en arithmétique est un véritable scandale : dans ce domaine si élémentaire, à côté de cette notion de nombre entier qui est la plus claire du monde, à côté de ces propositions si précises, de ces démonstrations si nettes que les plus grands mathématiciens ont pris à cœur d'accroître et de simplifier, et qui ont toute la beauté, toute la perfection de celles que les Grecs nous ont léguées, voici venir tout le cortège du transcendant et de l'infini. C'est là, non ailleurs, que sont condensées toutes les difficultés des idées de limite, de convergence, de continuité. Que faire pourtant, si l'on veut seulement écrire $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? Nous n'y pouvons rien, et c'est en vain qu'on se révoltera : cette idée de l'infini est dans la nécessité des choses; on la réduira, si l'on veut, à ses termes les plus simples, à dire qu'après un nombre entier il y en a un autre, on ne s'en débarrassera pas, pas plus en Arithmétique qu'ailleurs.

« A vrai dire, la sagesse est de reconnaître les difficultés là où elles sont, et l'honnêteté dans l'enseignement ne consiste pas à dire tantôt *on verra plus tard*, tantôt *on a déjà vu*, sans jamais rien montrer. Tout au moins, qu'on ait le courage de dire : il y a là un trou. Mais M. Humbert, qui écrivait aussi pour ceux qui doivent aller plus loin que le « trou », a eu raison d'essayer d'y faire pénétrer le plus de lumière possible, et de donner tous ses soins à bien éclairer la notion de nombre irrationnel. Son point de départ est le même que celui qu'il a pris pour les fractions, l'idée de longueur : à chaque longueur est attaché un nombre rationnel ou non; à chaque nombre rationnel ou non, une longueur est attachée : cette longueur sert à définir l'égalité, comme l'addition et la soustraction : d'ailleurs, on montre comment on peut se passer de cette considération concrète, au moyen d'opérations arithmétiques effectuées sur des nombres rationnels, et poursuivies jusqu'à l'infini.

« Ce procédé, qui a l'avantage de laisser un point d'appui à l'élève, de ne pas le noyer dans l'abstrait, suppose, comme le fait remarquer l'auteur, un postulat qui est étranger à l'idée de nombre, et qui n'est autre chose, quand on définit le nombre irrationnel abstraitement, que l'existence même d'un segment de droite mesuré

par ce nombre. Comme ce postulat est, en tout cas, absolument nécessaire, quand on veut appliquer l'algèbre à la géométrie, il n'y a rien à objecter à ce qu'on l'introduise.

« Enfin M. Humbert a voulu, avec raison, donner à son lecteur accès dans la théorie des nombres. Il importe, pour la bonne formation de l'esprit des étudiants, de leur montrer que la science n'est pas limitée, et qu'ils ne la possèdent pas dès qu'ils sont arrivés à la fin d'un livre. On trouvera dans celui-ci les propositions élémentaires concernant les congruences binômes, les restes quadratiques et le théorème relatif à la décomposition d'un nombre en quatre carrés.

« Je souhaite au livre de M. Humbert le succès qu'il mérite : il a été *pensé* avant d'avoir été écrit. »

Sommaire. Préliminaires. Livre I. *Nombres entiers. Premières opérations.* 1. Numération. 2. Addition. 3. Soustraction. 4. Multiplication. 5. Division et systèmes de numération. 6. Divisibilité.

Livre II. *Propriétés des nombres.* 1. Nombres premiers. 2. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. 3. Décomposition des nombres en facteurs premiers.

Livre III. *Nombres fractionnaires* (1-2). *Nombres décimaux* (3).

Livre IV. *Racines* (1. Carrée. 2. Cubique). *Nombres incommensurables* (50 pages).

Livre V. *Rapports et proportions. Règles de trois, d'intérêt, etc.*

Livre VI. 1. Erreurs. 2. Problèmes et théorèmes. 3. Système métrique décimal.

Voici maintenant quelques observations critiques. 1 (p. 14). La numération romaine n'avait pas la précision qui lui est attribuée ici. Les Romains désignaient, suivant les cas, 1620 ou 16020 par $\overline{\text{XVI}}$-XX.

2 (p. 118). Les tables de nombres premiers de Glaisher et Dase vont jusque 9 millions.

3. La théorie des fractions décimales périodiques nous semble trop compliquée.

4. Même observation pour la théorie des résidus quadratiques. En moins de pages, l'auteur aurait pu donner plus et même exposer la loi de réciprocité (démonstration de Zeller).

5 (p. 280). *Théorème de Bachet.* Il s'agit de la proposition : *Tout nombre entier est un carré, ou la somme de deux, de trois ou de quatre carrés*, cas particulier de l'un des plux beaux théorèmes de Fermat. M. Matrot et, après lui, M. Humbert, ont eu tort de donner à ce cas particulier le nom de Bachet, car Bachet n'a fait que soupçonner le théorème.

6 (p. 321). Il nous semble inexact d'affirmer que l'existence réelle des grandeurs incommensurables s'impose à l'esprit humain.

7. Toute la partie pratique (règles de trois, d'intérêt, etc.; système métrique) du livre de M. Humbert est assez maigre et très inférieure à la partie correspondante du livre de M. Gelin. (P. M.)

Traité d'analyse par ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome II. Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (XIV-512 pages in-8°). Prix : 15 fr. (*)

« La première partie de ce volume, dit M. Picard, est consacrée aux fonctions harmoniques et aux fonctions analytiques. L'étude des fonctions d'une variable complexe revient, comme on sait, à l'étude de l'équation de Laplace à deux variables. Toutefois, dans les écrits de Cauchy et de la plupart de ses disciples, l'équation précédente intervient peu et l'on raisonne sur la fonction complexe elle-même. La simplicité et l'uniformité des raisonnements font de cette théorie une des plus attrayantes et des plus parfaites de l'analyse mathématique. A la suite d'un mémoire fondamental de Riemann, l'étude des fonctions d'une variable complexe a été ramenée à sa véritable origine. Ce point de vue est assurément plus philosophique et il a le grand avantage de laisser de côté tout symbole. Aussi ai-je cru utile de l'adopter tout d'abord dans mon exposition. Dans ces conditions le problème dit de Dirichlet devait jouer un rôle essentiel ; je fais connaître la méthode de Neumann, celle de M. Schwarz, et enfin la méthode si originale employée par M. Poincaré pour le cas de l'espace et qui s'applique au cas du plan sans grande modification. On voit de plus que toute cette théorie n'est pas essentiellement bornée à l'équation si simple de Laplace, et l'on peut ainsi, sinon voir, du moins entrevoir des généralisations de la théorie des fonctions d'une variable complexe, sujet bien digne de fixer l'attention des analystes.

« Il ne faudrait pas cependant être exclusif. Le symbolisme a, dans certains cas, ses avantages, et des résultats très simples deviendraient quelquefois d'un énoncé compliqué si l'on voulait ne jamais introduire de quantités complexes. Aussi je reprends ensuite l'étude des fonctions analytiques au point de vue suivi généralement dans les ouvrages français.

« Dans les deux derniers Chapitres du volume, je commence l'étude des équations différentielles. J'insiste longuement sur le théorème relatif à l'existence des intégrales, dont je donne trois démonstrations différentes. Il est important, dans ces questions, de multiplier les points de vue ; ce ne sont pas là des curiosités inutiles, je veux dire dénuées d'applications. Au début de la Science, les théorèmes de ce genre sont admis sans difficulté. On peut avancer longtemps sans approfondir les questions d'existence, mais il arrive un moment où ce sont justement les circonstances singulières écartées au début qui deviennent intéressantes : il faut alors approfondir les principes et des démonstrations souvent très subtiles deviennent indispensables. On pourrait citer en témoignage bien des travaux récents ; qu'il nous suffise de rappeler les dernières recherches de notre illustre confrère M. Poincaré sur la Mécanique Céleste. »

(*) Dans la suite, nous nous contenterons de signaler la publication des volumes du *Traité d'analyse* de M. Picard, sans entrer dans le détail des sujets qui y seront traités, parce qu'ils sont en dehors du modeste programme de notre journal.

La seconde partie « traite des intégrales abéliennes et des surfaces de Riemann.

« On peut, par une représentation géométrique convenable, rendre intuitifs les principaux résultats de la théorie des surfaces de Riemann. Cette vue claire de la surface de Riemann une fois obtenue, toutes les applications se déroulent avec la même facilité que dans la théorie classique de Cauchy relative au plan simple. Mais il importe de juger à sa véritable valeur la belle conception de Riemann. Ce serait une vue incomplète que de la regarder seulement comme une méthode simplificative pour présenter la théorie des fonctions algébriques.... Le point essentiel de la théorie de Riemann est dans la conception *à priori* de la surface connexe formée d'un nombre limité de feuillets plans et dans le fait qu'à une telle surface conçue dans toute sa généralité correspond une classe de courbes algébriques. Nous nous sommes particulièrement attaché à la question difficile et capitale de l'existence des fonctions analytiques sur une surface de Riemann arbitrairement donnée. »

L'auteur a ensuite généralisé cette question pour une surface fermée quelconque et pour l'équation correspondante de Beltrami.

« Tout en accordant la préférence aux méthodes de Riemann, dit M. Picard, nous n'avons pas négligé le point de vue algébrique. »

Voici le sommaire des matières traitées dans ce volume, qui, en général, traite de questions tout à fait en dehors du programme de *Mathesis*, sauf quelques parties du chapitre I, du chapitre XI, et peut être du chapitre XIV.

CHAP. I. *Fonctions d'une variable complexe. Problèmes fondamentaux relatifs à l'équation de Laplace dans le plan.* Définition des fonctions d'une variable complexe. Dérivée. Intégrale. Fonction harmonique. Formule fondamentale. Les fonctions harmoniques sont analytiques. Détermination unique des fonctions harmoniques par leurs valeurs sur un contour fermé. Extension à l'équation linéaire générale du second ordre de quelques-uns des résultats obtenus par l'équation de Laplace. Problème de Dirichlet. Recherche de la fonction harmonique prenant des valeurs données sur un contour. Méthode de M. Neumann. — CHAP. II. *Développements en séries et prolongement analytique des fonctions harmoniques et des fonctions d'une variable complexe.* Développements en séries et extension des fonctions harmoniques. Fonctions harmoniques à l'infini. Problème de Dirichlet pour l'extérieur d'une aire. Développement en série des fonctions analytiques d'une variable complexe. Théorème de Cauchy. Fonctions élémentaires. — CHAP. III. *De la méthode alternée.* Procédé alterné de M. Schwarz. Application du procédé alterné à d'autres équations que l'équation de Laplace. — CHAP. IV. *Méthode de M. Poincaré pour la solution du problème de Dirichlet.* Propriétés fondamentales du potentiel logarithmique. Méthode de M. Poincaré — CHAP. V. *Étude directe des fonctions d'une variable complexe.* Théorèmes généraux de Cauchy. Pôles et points singuliers essentiels d'une fonction uniforme. Fonctions analytiques élémentaires d'une variable complexe. Sur les produits convergents. Décomposition en facteurs des fonctions uniformes. — CHAP. VI. *Applications des théorèmes généraux de Cauchy sur les fonctions d'une variable complexe.* Recherche de quelques intégrales définies. Développement en séries de fractions rationnelles. Méthode de Cauchy pour obtenir

la série de Fourier et des séries analogues. Nombre des racines d'une équation contenues dans un contour. Théorie des indices. — CHAP. VII. *Nombre de racines communes à deux équations simultanées.* — CHAP. VIII. *Intégrales de fonctions non uniformes.* Intégrales hyperelliptiques. Des intégrales de première espèce; réduction du nombre des périodes. Intégrale elliptique. — CHAP. IX. *Des fonctions de plusieurs variables indépendantes.* Généralités sur les fonctions de plusieurs variables complexes. Décomposition en facteurs d'une fonction de plusieurs variables. Fonctions implicites. Des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables complexes. Extension du théorème de Cauchy d'après M. Poincaré. — CHAP. X. *Sur la représation conforme.* Quelques remarques générales. Arcs analytiques. Représentation conforme d'une aire simple sur un cercle. Exemples. Méthode de M. Schwarz pour le principe de Dirichlet. — CHAP. XI. *Théorèmes généraux sur les équations différentielles.* Première démonstration de Cauchy relative à l'existence des intégrales. Démonstration de l'existence de l'intégrale par une méthode d'approximations successives. Démonstrations au moyen du calcul des limites de Cauchy. Comparaison des domaines de convergence. Détermination unique d'un système d'intégrales par les valeurs initiales. Existence des intégrales des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles. — CHAP. XII. *Quelques applications des théorèmes généraux.* Cas où le coefficient différentiel devient infini. Théorème de M. Poincaré sur les fonctions définies par une équation du premier ordre. Équation de Riccati et équation du premier ordre. Inversion de l'intégrale elliptique. Fonctions entières associées aux fonctions elliptiques. — CHAP. XIII. Généralités sur les fonctions algébriques d'une variable. Théorème de M. Noether. Surfaces de Riemann. — CHAP. XIV. *Des intégrales abéliennes.* Periodicité. Théorème d'Abel. Les trois espèces. — CHAP. XV. *Des fonctions uniformes sur une surface de Riemann.* — CHAP. XVI. *Théorèmes généraux relatifs à l'existence d'une fonction sur une surface de Riemann* (avec généralisation). — CHAP. XVII. *Courbes des genres zéro et un.* Généralités sur les fonctions doublement périodiques.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 791.

(Voir *Mathesis* (2), t. II, p. 240.)

On donne un quadrilatère ABCD. *Par* A *et* B *on fait passer une circonférence* O, *par* C *et* D *une circonférence* I *coupant orthogonalement la précédente. Trouver* 1° *l'enveloppe de la ligne des centres des deux cercles;* 2° *celle de leur axe radical;* 3° *le lieu de l'intersection des deux circonférences;* 4° *le lieu du pied de l'axe radical;* 5° *le lieu du point de rencontre des tangentes menées en* A *et* C *respectivement aux deux cercles* O *et* I.

(DÉPREZ.)

Solution par M. A. Morel, *ingénieur au Creusot*. Prenons pour axes de coordonnées un côté AB et la perpendiculaire abaissée de C sur AB; soient alors $(p, 0)$, $(p', 0)$, $(0, q)$, (r, q') les coordonnées de A, B, C, D. Les équations des circonférences O, I sont

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + h = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + h' = 0,$$

avec les conditions

$$a = \frac{p + p'}{2}, \quad h = pp', \tag{1}$$

$$q^2 - 2b'q + h' = 0, \quad r^2 + q'^2 - 2a'r - 2b'q' + h' = 0, \tag{2}$$

$$2(aa' + bb') - (h + h') = 0, \tag{3}$$

qui expriment que les deux lignes passent, respectivement, par A et B, par C et D et qu'elles sont orthogonales. On voit que a et h sont des constantes, que b, a', b', h' sont des paramètres variables entre lesquels il existe les relations (2) et (3). Nous exprimons h', a', b en fonction de b', ce qui donne

$$h' = 2b'q - q^2, \quad a' = \frac{r^2 + q'^2 - q^2}{2r} + \frac{q - q'}{r} b' = \alpha + \beta b',$$

$$b = \gamma + \frac{\delta}{b'},$$

α, β, γ, δ étant des constantes.

1° Cela posé, la ligne des centres des deux cercles a pour équation

$$(a' - a)y + (b - b')x + ab' - ba' = 0;$$

introduisant les valeurs de a' et b, on obtient une équation de la forme

$$Mb'^2 + 2Nb' + P = 0, \tag{4}$$

où M, N, P sont des fonctions linéaires de x, y. L'enveloppe de la ligne des centres est donc la conique représentée par $N^2 - MP = 0$.

2° L'axe radical des deux cercles a pour équation

$$2x(a' - a) + 2y(b' - b) + h - h' = 0$$

ou

$$M'b'^2 + 2N'b + P' = 0, \tag{5}$$

M', N', P' désignant des polynômes du premier degré en x, y. L'enveloppe de cet axe est encore une conique.

3° Les équations des deux cercles peuvent être écrites ainsi :

$$x^2+y^2-2ax-2\gamma y+h=\frac{2\partial}{b'}y, \tag{6}$$

$$x^2+y^2-2\alpha x-q^2=2b'(\beta x+y-q); \tag{7}$$

les points d'intersection décrivent donc une quartique :

$$(x^2+y^2-2ax-2\gamma y+h)(x^2+y^2-2\alpha x-q^2)=4\partial y(\beta x+y-q).$$

4° Pour trouver le lieu du pied de l'axe radical on élimine b' entre les égalités (4) et (5); on obtient une quartique.

5° Les équations des tangentes en A et C sont

$$px-a(p+x)=\frac{\partial}{b'}y,\quad qy-\alpha x=b'(\beta x+y).$$

Si l'on élimine b', on trouve une équation du second degré; par conséquent les tangentes se coupent sur une conique.

×Question 824.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

Inscrire dans un cercle donné O ***un triangle isoscèle tel que la somme des distances du centre du cercle aux trois côtés du triangle soit égale à une longueur donnée*** m.

Discuter le problème et indiquer si le centre du cercle se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle correspondant à une solution déterminée. (*Baccalauréat*, Rennes, 1892.)

Solution par MM. Delahaye, Bellens, Camus, François, Quint, Decamps. Soient AA′ un diamètre du cercle O, BC une corde perpendiculaire à AA′ en un point D situé entre O et A′. Si le triangle ABC résout le problème et qu'on mène OM perpendiculaire à AB, on a, dans le quadrilatère inscriptible BDOM,

$$\mathrm{AM.AB}=\mathrm{AO.AD},\quad \text{ou}\quad 2\overline{\mathrm{AM}}^2=\mathrm{R}(\mathrm{R}+\mathrm{OD}),$$

d'où, en prenant pour inconnue $\mathrm{OM}=x$,

$$\mathrm{OD}=\frac{2\overline{\mathrm{AM}}^2-\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{R}^2-2x^2}{\mathrm{R}}.$$

L'équation du problème est donc

$$2x + \frac{R^2 - 2x^2}{R} = m, \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 2Rx + R(m - R) = 0. \qquad (1)$$

Pour que OD soit positif, on doit avoir $x < \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Si A'BC est le triangle cherché et que l'on projette O en M' sur A'B, on trouve

$$2\overline{A'M'}^2 = A'O.A'D, \quad \text{ou} \quad 2(R^2 - x^2) = R(R - OD);$$

par conséquent

$$OD = \frac{2x^2 - R^2}{R} \quad \text{et} \quad 2x + \frac{2x^2 - R^2}{R} = m,$$

ou

$$2x^2 + 2Rx - R(m + R) = 0. \qquad (2)$$

1° L'équation (1) donne

$$x = \tfrac{1}{2}[R \pm \sqrt{R(3R - 2m)}].$$

Le maximum de m est $\frac{3}{2}R$; il correspond à $x = \frac{1}{2}R$, c'est-à-dire à un triangle équilatéral. Les deux valeurs de x résolvent le problème si elles sont comprises entre 0 et $(R : \sqrt{2})$; d'après les propriétés du trinôme du second degré, le premier membre de (1) doit être positif pour $x = 0$ et $x = (R : \sqrt{2})$. On en conclut $m > R$ et $m > R\sqrt{2}$; donc le problème a deux solutions lorsque $R\sqrt{2} < m < \frac{3}{2}R$.

Une seule valeur de x est comprise entre 0 et $(R : \sqrt{2})$, si le premier membre de (1) a des signes contraires pour $x = 0$ et $x = (R : \sqrt{2})$; ce qui exige $R < m < R\sqrt{2}$.

2° Les racines de l'équation (2) sont

$$x = \tfrac{1}{2}[-R \pm \sqrt{3R^2 + 2Rm}];$$

elles sont toujours réelles et de signes contraires.

Pour que la racine positive soit admissible, elle doit être comprise entre $(R : \sqrt{2})$ et R ; donc le premier membre de l'équation doit avoir des signes contraires pour $x = R$ et $x = (R : \sqrt{2})$, ce qui exige $R\sqrt{2} < m < 3R$.

En résumé, lorsque $R < m < R\sqrt{2}$, le problème a une solution dans laquelle O est intérieur au triangle ; lorsque $R\sqrt{2} < m < \frac{3}{2}R$, le problème a trois solutions, dont deux ont le centre O intérieur et le

troisième extérieur; il n'existe qu'une solution ayant le centre extérieur, lorsque $\frac{5}{2}\,R < m < 3\,R$, le problème est impossible si $m < R$ ou $> 3\,R$.

Les hypothèses $m = R$, $R\sqrt{2}$, $\frac{5}{2}\,R$, $3\,R$ donnent respectivement $x = 0$, $R\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\,R$ ou $\frac{1}{2}\,R(\sqrt{6}-1)$, R; le triangle se réduit en diamètre AA', devient rectangle isoscèle, équilatéral ou obtusangle, on se réduit au point A'.

Question 826.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

Démontrer la formule

$$\frac{q}{1-q}-\frac{q^2}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^4}{1-q^4}+\text{etc.}$$
$$=q+q^4+q^9+q^{16}+q^{25}+\text{etc.}$$

Dans le premier membre, le terme en q^a est pris avec le signe + ou le signe —, selon que a est le produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers. Il y a exception pour le premier terme.

(Baschwitz.)

Solution par M. E. Cesáro. Si la décomposition de n en facteurs premiers donne $n = u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots$, et que l'on pose $\lambda(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$, on sait que la somme des valeurs de la fonction λ, étendue à tous les diviseurs $a, b, c, \ldots$, de n, est égale à zéro, excepté pour n carré. Dans ce cas, elle est égale à l'unité. D'autre part, si l'on pose

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots\cdots = F(n),$$

il est presque évident que

$$\sum_1^\infty \frac{q^i f(i)}{1-q^i} = qF(1)+q^2F(2)+q^3F(3)+\cdots\cdots$$

Donc

$$\sum_1^\infty \frac{q^i \lambda(i)}{1-q^i} = q+q^4+q^9+\cdots\cdots$$

Quant à la propriété de la fonction λ, énoncée en commençant, on peut la démontrer en remarquant d'abord que $\lambda(x)\,\lambda(y) = \lambda(xy)$. Il en résulte

$$\lambda(a)+\lambda(b)+\cdots\cdots = \sum_0^\alpha \lambda(u^i)\cdot \sum_0^\beta \lambda(v^i)\cdots\cdots$$

Tout facteur du second membre a la valeur 0 ou la valeur 1, suivant que

l'exposant $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ qui lui correspond est impair ou pair. Donc, pour que le premier membre ne soit pas nul, il faut et il suffit que tous les exposants soient pairs, c'est-à-dire que n soit un carré (1).

×Question 822.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

Des équations

$$\sqrt{l \sin A} + \sqrt{m \sin B} + \sqrt{n \sin C} = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{\cos^2 \frac{1}{2} A}{l} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{m} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{n} = 0, \tag{2}$$

déduire

$$l \cos^2 \tfrac{1}{2} A = m \sin^2 \tfrac{1}{2} B + n \sin^2 \tfrac{1}{2} C. \tag{3}$$

(A. C.)

Solution par M. Déprez. L'équation (1) peut s'écrire

$$\Sigma l^2 \sin^2 A - 2\Sigma lm \sin A \sin B = 0,$$

ou encore

$$(-l \sin^2 \tfrac{1}{2} A + m \cos^2 \tfrac{1}{2} B + n \cos^2 \tfrac{1}{2} C)(-l \cos^2 \tfrac{1}{2} A + m \sin^2 \tfrac{1}{2} B + n \sin^2 \tfrac{1}{2} C)$$
$$= mn \cos^2 \tfrac{1}{2} A - nl \sin^2 \tfrac{1}{2} B - ml \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

d'où, à cause de l'équation (2), l'égalité (3) ou la suivante

$$-l \sin^2 \tfrac{1}{2} A + m \cos^2 \tfrac{1}{2} B + n \cos^2 \tfrac{1}{2} C = 0.$$

×Question 843.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

Sur les arêtes AD, BD, CD, ***d'un tétraèdre*** ABCD, ***on prend trois longueurs égales*** $AA' = BB' = CC' = \lambda$. ***Trouver le lieu décrit par le point d'intersection des plans*** BCA′, CAB′, ABC′ ***lorsque*** λ ***varie.***

---

(1) Les termes du produit effectué

$$(u^0 + u^1 + u^2 + \cdots + u^\alpha)\ (v^0 + v^1 + \cdots + v^\beta)\ (w^0 + w^1 + \cdots + w^\gamma) \cdots$$

sont les diviseurs de n. Remplaçons $u, v, w,$ par -1; le produit effectué représente $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots$, tandis que les facteurs du produit non effectué ont pour valeur 0 ou 1 suivant que l'exposant de leur dernier terme $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ est impair ou pair. (J. N.).

Solution par M. Absolonne. Le point d'intersection I de BC′ et de CB′ décrit une droite i dans le plan BCD ; le point dont on demande le lieu reste donc dans le plan déterminé par A et la droite i. Il appartient de même au plan passant par B et le lieu de I′ intersection de AC′ et de CA′ ; son lieu géométrique est donc une droite.

On remarque que les plans menés par A, B, C et les droites que parcourent I, I′, I″ se coupent suivant une même droite.

Solution par M. Servais. La question peut être généralisée. Prenons sur AD, BD, CD les longueurs

$$AA' = p\alpha, \quad BB' = q\alpha, \quad CC' = r\alpha$$

α étant une quantité variable et p, q, r trois longueurs données.

Les droites CB′ et BC′ engendrent deux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs BC, étant sa propre homologue ; donc leur point d'intersection I décrit une droite qui rencontre les arêtes BD et CD en deux points B_1 et C_1 tels que $BB_1 : CD = BD : CC_1 = q : r$. L'intersection AI des plans ABC′, ACB′ décrit donc le plan AB_1C_1. Il résulte de là que le point commun aux trois plans ABC′, CBA′, ACB′ décrit une droite.

Note. Nous avons proposé la question 843 à nos jeunes lecteurs pour attirer leur attention sur le lieu analogue de la géométrie plane :

Sur les côtés AD, BD *d'un triangle* ABD, *on prend deux longueurs égales* $AA' = BB' = \lambda$. *Le lieu du point d'intersection* I *des droites* AB′, BA′ *est la bissectrice de l'angle* E *du parallélogramme* DAEB *construit sur* DA, DB.

On trouve immédiatement plusieurs points remarquables de ce lieu. Le point E correspond à $\lambda = \infty$; si l'on prend sur AD une longueur $AA_1 = DB$, sur BD une longueur $BB_1 = DA$, les points A_1, B_1 appartiennent au lieu ($\lambda = DB$ ou DA) ; les droites joignant A, B aux points de contact de DB avec le cercle exinscrit dans l'angle DAB, et de DA avec le cercle exinscrit dans l'angle DBA se coupent sur le lieu. La droite A_1B_1 est, on le voit facilement, parallèle à la bissectrice de l'angle ADB.

Voici deux démonstrations élémentaires empruntées au *Journal de Vuibert* (15 mars 1893). 1° Si AB′ coupe EB en F, des triangles semblables donnent :

$$\frac{EA}{EF} = \frac{BB'}{BF} = \frac{AA'}{BF} = \frac{AI}{FI}, \text{ etc.}$$

2° Construisons le parallélogramme A'D B'D' et désignons par G, H les points où B'D', A'D' rencontrent respectivement AE, BE.

La figure EGD'H étant un losange, ED' est la bissectrice de l'angle AEB ; je dis que cette droite passe par I. En effet, le triangle ADB' coupé par la transversale A'LB donne

$$\frac{IA}{IB'}\cdot\frac{A'D}{A'A}\cdot\frac{BB'}{BD}=-1, \quad \text{ou} \quad \frac{IA}{IB'}\cdot\frac{D'B'}{D'G}\cdot\frac{EG}{EA}=-1.$$

Donc les points I, D', E (considérés dans le triangle AB'G) sont en ligne droite.

Le point où EI coupe AB doit être considéré comme correspondant à $\lambda = 0$; c'est l'isotomique du pied de la bissectrice de l'angle ADB sur AB.

Dans la question 843, le point qui correspond à $\lambda = 0$ est à l'intersection des droites joignant A, B, C aux isotomiques des points de rencontre de BC, CA, AB avec les bissectrices des angles BDC, CDA, ADB. (J. N.)

Questions 845 et 850.

(Voir *Mathesis*, (2), III, 128 et 152.)

845. *Par deux points fixes* D, E *pris sur le coté* AB *du triangle de référence* ABC, *on mène des tangentes à une parabole quelconque inscrite à ce triangle. Trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.*

850. *On mène deux tangentes parallèles à deux directions données, à une parabole quelconque inscrite au triangle* ABC. *Trouver le lieu du point de rencontre de ces deux tangentes.* (V. Retali.)

Solution par M. Servais. Ces deux questions sont des particuliers du problème suivant : *Par deux points fixes* E, F *pris sur le coté* AB *du quadrilatère* ABCD, *on mène des tangentes à une conique inscrite dans ce quadrilatère. Trouver le lieu du point de rencontre* M *de ces tangentes.*

Soit G le point d'intersection des droites AD, BC, l'hexagone EGFDMC sera un hexagone de Pascal ; le lieu du point M est donc une conique déterminée par les cinq points E, G, F, D, C. Si DC est à l'infini, on a la question 845 ; la question 850 suppose au contraire le côté AB à l'infini.

Au moment de mettre sous presse, M. Jamet nous envoie une solution rattachant comme la précédente, la question 850, à un théorème plus général sur un faisceau tangentiel de coniques ; ce théorème se ramène par voie de dualité, à celui qui est établi par M. Jamet, *Mathesis*, (2), II, 105.

Solution de la question 850, par M. E. N. Barisien. Prenons le côté CA pour axe des x et le côté CB pour axe des y, et posons $AC = a$, $BC = b$. L'équation d'une parabole tangente aux côtés CA et CB est

$$\sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\sqrt{\frac{y}{\beta}}=1, \text{ ou } \left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)+1=0; \qquad (1)$$

α et β sont les distances des points de contact à l'origine C.

Pour que la parabole (1) soit tangente à la droite AB, on a

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}=1. \qquad (2)$$

L'équation du faisceau des tangentes à la parabole issues d'un point $(x_0\ y_0)$ est

$$\left[\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)+1\right]\left[\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}\right)+1\right]$$
$$-\left[\frac{x}{\alpha}\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}-1\right)+\frac{y}{\beta}\left(-\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}-1\right)-\left(\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}-1\right)\right]^2=0.$$

L'ensemble des termes du second degré de ce faisceau se réduit à

$$\frac{4}{\alpha\beta}\left[\frac{x^2y_0}{\alpha}+\frac{y^2x_0}{\beta}-xy\left(\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}-1\right)\right],$$

de sorte qu'en posant $y = Mx$, l'équation aux coefficients angulaires du faisceau est

$$M^2\alpha x_0 - M(\beta x_0 + \alpha y_0 - \alpha\beta) + \beta y_0 = 0.$$

Si donc M′ et M″ sont les deux coefficients angulaires des directions données, on a

$$M' + M'' = \frac{\beta x_0 + \alpha y_0 - \alpha\beta}{\alpha x_0}, \quad M'M'' = \frac{\beta y_0}{\alpha x_0}. \qquad (3)$$

On aura donc le lieu des points (x_0, y_0) en éliminant α et β entre (2) et (3). Or, des égalités (3), on tire

$$\alpha = \frac{y_0^2 + M'M''x_0^2 - (M' + M'')\,x_0y_0}{M'M''x_0},$$

$$\beta = \frac{y_0^2 + M'M''x_0^2 - (M' + M'')\,x_0y_0}{y_0}.$$

Portant ces valeurs dans (2) et supprimant les indices, on trouve

$$y^2 + M'M''x^2 - (M' + M'')\,xy - aM'M''x - by = 0,$$

ou

$$(y - M'x)(y - M''x) - aM'M''x - by = 0. \qquad (5)$$

Le lieu est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux directions données, et qui est circonscrite au triangle ABC.

Solution géométrique. Si par un même point on mène les droites a, b, c, d, d' parallèles à BC, CA, AB et aux directions données, et si l'on désigne par γ le point de contact de AB avec l'une des paraboles, par δ, δ' les points de rencontre de AB avec les tangentes menées à cette courbe parallèlement à d et d', le faisceau $abcdd'$ est projectif (homographique) avec la ponctuelle $BA\gamma\delta\delta'$, déterminée sur la tangente AB par les tangentes parallèles aux rayons du faisceau. Par conséquent, les trois points γ, δ, δ' engendrent des ponctuelles projectives, et les tangentes parallèles à d, d' se correspondent dans deux faisceaux parallèles projectifs. On en conclut que le lieu demandé est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à d et d', et qui passe par A, B, C; car A et B sont des éléments doubles des ponctuelles projectives (δ), (δ').

Plus simplement, si t, t' désignent les tangentes menées à l'une des paraboles parallèlement à d, d', la connaissance de t détermine la parabole et par suite t'; de même t' détermine t, donc t et t' se correspondent dans deux faisceaux parallèles projectifs, etc. (J. N.)

×Question 853.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 152.)

A et B étant deux nombres positifs quelconques et m un nombre entier positif, démontrer que l'on a toujours

$$(A + B)^m < 2^{m-1}(A^m + B^m).$$

Solution par M. M. Delahaeye *et* Droz-Farny. Posons $A = s + d$, $B = s - d$; alors $2s$ est la somme et $2d$ la différence des nombres donnés. Nous aurons

$$A^m + B^m = (s + d)^m + (s - d)^m = 2s^m + 2C_{m,1}s^{m-2}d^2 + \cdots > 2s^m;$$

donc $2^{m-1}(A^m + B^m) > 2^m s^m = (2s)^m$, ce qui démontre la proposition.

On voit aussi que, si la somme $A + B$ est donnée, le maximum de $A^m + B^m$ correspond à $A = B$.

Cette question a été aussi résolue par MM. Verdeyen (athénée de Gand), et Mandart.

Question CXXI.

(N. C. M., II, p. 190; Laisant, IV, n° 165.)

Soient ABC, A'B'C' *deux triangles, situés d'une manière quelconque dans l'espace. Le lieu d'un point* P, *tel que les trois droites menées par* P *et s'appuyant respectivement sur les couples de droites* (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') *sont situées dans un même plan, est l'hyperboloïde passant par les droites* AA', BB', CC'. (J. Neuberg.)

Solution par M. E. Genty. Soient α, β et γ; α', β' et γ' les vecteurs des sommets des triangles ABC, A'B'C'.

Pour que les droites menées par l'origine et s'appuyant respectivement sur les couples de droites (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') soient situées dans un même plan, il faut qu'on ait

$$(1) \qquad S\,V(V\beta\gamma\ V\beta'\gamma')\ V(V\gamma\alpha\ V\gamma'\alpha')\ V(V\alpha\beta\ V\alpha'\beta') = 0.$$

De même, pour que l'origine soit située sur l'hyperboloïde déterminé par les trois droites AA', BB', CC', on doit avoir

$$(2) \qquad S\,V\alpha\alpha'\ V\beta\beta'\ V\gamma\gamma' = 0.$$

Je dis que les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

En effet, l'équation (2) développée donne :

$$S\alpha\alpha'\gamma S\beta\beta'\gamma' - S\alpha\alpha'\gamma' S\beta\beta'\gamma = 0.$$

Pour développer l'équation (1), il faut, dans l'équation qui précède, remplacer α, β et γ par $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ et $V\alpha\beta$ respectivement, et α', β' et γ' par $V\beta'\gamma'$, $V\gamma'\alpha'$, $V\alpha'\beta'$.

En faisant cette substitution, $S\alpha x'\gamma$ est remplacé par

$$S\,V\alpha\beta V\beta\gamma V\beta'\gamma' = S\alpha\beta\gamma S\beta\beta'\gamma';$$

de même $S\beta\beta'\gamma'$ est remplacé par

$$S\,V\gamma\alpha V\gamma'\alpha' V\alpha'\beta' = S\alpha'\beta'\gamma' S\alpha\alpha'\gamma;$$

et ainsi de suite. Donc on a

$$S\,V(V\beta\gamma V\beta'\gamma')\,V(V\gamma\alpha V\gamma'\alpha')\,V(V\alpha\beta V\alpha'\beta') = S\alpha\beta\gamma S\alpha'\beta'\gamma' S\,V\alpha\alpha' V\beta\beta' V\gamma\gamma,$$

ce qui démontre la proposition.

Solution par M. SOLLERTINSKY(*). Soient $P\alpha\alpha'$, $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ trois droites s'appuyant sur les couples (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B') aux points (α, α'), (β, β'), (γ, γ'). Désignons par A_1, B_1, C_1 les points de rencontre des droites PA', PB', PC' avec le plan ABC. Les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ coupent ceux du triangle ABC aux points α, β, γ. Si les droites $P\alpha\alpha'$, $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ sont situées dans un même plan, les points α, β, γ sont en ligne droite. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont donc homologiques : par suite, les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point S.

Il résulte de là que les plans PAA', PBB', PCC' passent par une même droite PS, ou que PS est une génératrice de l'hyperboloïde (ou du paraboloïde) déterminé par les droites AA', BB', CC'.

Réciproquement, tout point P de cet hyperboloïde jouit de la propriété énoncée dans la question proposée.

Cette surface est donc le lieu demandé.

QUESTIONS D'EXAMEN.

571. On donne un triangle ABC rectangle en A et les perpendiculaires en B et C au plan du triangle. Trouver sur ces perpendiculaires, d'un même côté du plan ABC, les points B', C' tels que l'angle B'AC' soit égal à un angle donné α et que l'aire du triangle $B'AC' = k^2$. (*St-Cyr*, 1892.)

Les côtés a', b', c' du triangle B'AC' ont pour expressions

$$\sqrt{a^2+(x-y)^2},\quad \sqrt{b^2+x^2},\quad \sqrt{c^2+y^2},$$

où $x = CC'$, $y = BB'$. Substituons ces valeurs dans

$$\cos\alpha = \frac{b'^2+c'^2-a'^2}{2b'c'},\quad k^2 = \frac{1}{2}b'c'\sin\alpha;$$

nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{xy}{\sqrt{(b^2+x^2)(c^2+y^2)}},\quad \sin\alpha = \frac{2k^2}{\sqrt{(b^2+x^2)(c^2+y^2)}},$$

d'où

$$xy = 2k^2\operatorname{cotg}\alpha,\quad c^2x^2+b^2y^2 = 4k^4-b^2c^2,\ \text{etc.}$$

572. Résoudre l'équation

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1.$$

(*) Cette solution a été publiée dans *El Progreso Matemático*, 1892, t. II, p. 290.

Vérifier les solutions. On peut voir *à priori* que l'équation est impossible si l'on prend les radicaux avec le signe +.

Voir N. A. M, 1845, p. 520.

572. En chaque point M d'une ellipse, le rapport du cosinus de l'angle FMT de la tangente MT avec un rayon vecteur, au cosinus de l'angle MTF de la tangente avec l'axe focal est constant.

Cet énoncé nous a été communiqué par M. Barisien. On l'établit très facilement par la géométrie. Si MN est la normale en M, on a

$$\frac{\cos \mathrm{FMT}}{\cos \mathrm{MTF}} = \frac{\sin \mathrm{FMN}}{\sin \mathrm{MNF}} = \frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{NF'}}{\mathrm{MF'}} = \frac{\mathrm{FN} + \mathrm{NF'}}{\mathrm{FM} + \mathrm{F'M}}.$$

574. Résoudre l'équation

$$\operatorname{arc\,tang} x^3 + \operatorname{arc\,tang} x = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3}.$$

575. A un triangle ABC, on inscrit un second triangle A'B'C' (A' est sur BC, ...). Calculer les côtés du triangle A'B'C' en fonction des éléments du triangle ABC et des angles AB'C' = β, CA'B' = γ, BC'A' = α.

576. Dans tout triangle ABC,

$$\frac{b - 2a\cos \mathrm{C}}{a \sin \mathrm{C}} + \frac{c - 2b\cos \mathrm{A}}{b \sin \mathrm{A}} + \frac{a - 2c\cos \mathrm{B}}{c \sin \mathrm{B}} = 0.$$

577. On donne quatre points en ligne droite A, B, C, D; trouver sur cette droite un cinquième point X tel, que l'on ait

$$\frac{\mathrm{XA}}{\mathrm{XB}} = \frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{XD}}.$$

1° E étant un point quelconque du plan, mener CF, DF parallèles à AE, BE; EF passera par X. 2° E étant un point quelconque, les circonférences EAD, EBC se coupent en un second point F; EF rencontrera AB en X.

578. Si l'on a

$$\sin \mathrm{C} = \cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B}, \quad \text{ou} \quad \sin \mathrm{A} = \frac{\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}}{\cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C}},$$

le triangle ABC est rectangle.

579. Si sin A = 2 sin B cos C, le triangle ABC est isoscèle.

580. Si tg B $\sin^2$ C = tg C $\sin^2$ B, le triangle ABC est isoscèle ou rectangle.

581. Trouver le nombre des côtés d'un polygone dont on connaît le nombre des diagonales ?

582. Sur le côté CD d'un parallélogramme ABCD, on prend le segment $CE = \frac{1}{n} CD$. La diagonale AC coupe BE en F. Prouver que

$$\frac{ADEFA}{n^2+n-1} = \frac{AFB}{n^2} = \frac{BFC}{n} = \frac{CFE}{1} \qquad \text{(Christie).}$$

583. Démontrer l'identité

$$(a^2+b^2)(r^2+s^2)^2 = [2ars + b(r^2-s^2)]^2 + [2brs - a(r^2-s^2)]^2,$$

en appliquant deux fois l'identité

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = [aa' \pm bb']^2 + [ab' \mp a'b]^2 \quad \text{(Tebay).}$$

584. Résoudre le système d'équations

$$(y-z)^2 + l^2 = 2l(y+z), \quad (z-x)^2 + m^2 = 2m(z+x),$$
$$(x-y)^2 + n^2 = 2n(x+y) \qquad \text{(Lemoine.)}$$

Rép. $l = y+z \pm 2\sqrt{yz}$, d'où $\pm\sqrt{l} = \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**855** (rectifié.) Si un nombre premier N a la forme $4\mu - 1$, N^2 est la somme de trois carrés. (E. Catalan.)

×**864.** Déterminer n de manière que $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ soit un carré. (de Rocquigny).

865. L'aire comprise entre la courbe

$$y^2(x^2+a^2)^3 = a^6(x^2+b^2)$$

et son asymptote réelle est égale au périmètre de l'ellipse de demi-axes a et b, multiplié par a. (E. N. Barisien)

×**866.** Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle, J le centre de son cercle inscrit. La perpendiculaire élevée en J à JO rencontre le cercle inscrit en deux points K et K'. Montrer que le périmètre du triangle OKK' est égal au diamètre du cercle circonscrit. (E. N. Barisien.)

867. Dans un triangle rectangle ACB, l'hypoténuse AB est fixe et le sommet C de l'angle droit variable. Soit P la projection de C sur AB. On prend entre A et B, sur AB, un point Q tel que AQ = BP. Montrer que la droite CQ enveloppe une développée d'éllipse. (F. N. Barisien.)

×**868**. Soit T_n le n° nombre triangulaire, c'est-à-dire $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Démontrer que le produit

$$(T_n + T_{n+1})(T_p + T_{p+1})$$

est la somme de trois nombres triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

×**869**. Déterminer n de telle sorte que la somme des n premiers triangulaires soit aussi un nombre triangulaire. (DE ROCQUIGNY.)

×**870**. On partage les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points A', B', C' dans un même rapport $p : q$; soient A'', B'', C'' les seconds points de rencontre des droites AA', BB', CC' avec la circonférence circonscrite au triangle ABC. Calculer en fonction des éléments du triangle ABC 1° les longueurs des cordes AA'', BB'', CC''; 2° les longueurs des cordes B''C'', C''A'', A''B''. (J. N.)

871. Soient, sur une circonférence O, A un point fixe, B un point variable. La circonférence décrite de A comme centre avec le rayon AB coupe la tangente menée en B au cercle O en un point M, et le rayon OB en un point N. Trouver les lieux des points M et N. (BROCARD.)

872. Trouver l'enveloppe et les trajectoires orthogonales des circonférences telles que les rayons aboutissant aux points où elles rencontrent une droite fixe d passent par deux points fixes A, B, situés sur une perpendiculaire d' à la droite considérée d. (E. CESARO.)

×**873**. Etant donné un triangle ABC, il existe trois autres triangles A'BC, B'CA, C'AB ayant un côté commun avec ABC et même point de Lemoine K. Démontrer que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point. (SCHOUTE.)

Voir *Mathesis*, t. IV, p. 195.

874. Une courbe plane se déforme de telle sorte que l'abscisse de chaque point restant la même, l'ordonnée tourne d'un angle θ qui reste le même pour tous les points de la courbe. Trouver l'enveloppe de toutes les courbes ainsi obtenues, lorsque l'angle θ prend toutes les valeurs possibles. (LAISANT.)

La question est connue pour l'ellipse. Il est intéressant de déterminer géométriquement le point de contact de l'enveloppe avec la courbe mobile. (J. N.)

875. On donne, dans un même plan, une conique C et un cercle O. Soit AB la corde des contacts de la conique C avec un des cercles qui lui sont bitangents. L'axe radical de ce cercle et du cercle O coupe la droite

AB en un point M dont on demande le lieu géométrique. Quelle est l'enveloppe de cet axe radical. (V. JAMET.)

876. Étant donnés un angle xOy et un point P, une sécante quelconque menée par P rencontre Ox en A, Oy en B. Sur la droite AB qui reste toujours sa propre homologue on construit une figure F de forme invariable.

1° Tout point C de F décrit une hyperbole.

2° Le centre de cette hyperbole forme une figure F′ semblable à celle du point C.

3° Le centre de similitude des figures F, F′ décrit une circonférence.

4° Le centre instantané de similitude de la figure F décrit une podaire d'hyperbole. (SOLLERTINSKY.)

×**877.** On décrit trois circonférences O_1, O_2, O_3 ayant pour diamètres l'hypoténuse BC et les côtés AB, AC d'un triangle rectangle.

1° La tangente en A à la première rencontre les deux autres circonférences en D et E; démontrer que les cordes AD, AE sont égales. 2° La droite joignant A au milieu de l'hypoténuse rencontre les circonférences O_2, O_3 en des points F, G diamétralement opposés à D et E et tels que les cordes AF, AG sont égales aux projections de AB, AC sur BC. 3° La somme des segments sous-tendus dans le cercle O_1 par les cordes AB, AC est égale à la somme des segments sous-tendus dans les cercles O_2, O_3 respectivement par les cordes BD, AE ou par les cordes AD, CE. (RENSHAW.)

×**878.** Appelons *pseudocarré* tout quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires. Démontrer que les carrés construits intérieurement sur deux côtés opposés AB et CD d'un pseudocarré ont même centre, et que ce point est le milieu de la droite joignant les centres des carrés construits extérieurement sur les deux autres côtés BC, DA.

(J. NEUBERG.)

×**879.** Les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un pseudocarré.

(H. VAN AUBEL.)

Rectifications. Page 173, ligne 13, lire 305, au lieu de 905. Supplément de la livraison de juin, p. 10, lignes 15 et 17, remplacer C'A par C'B, C'B par C'A.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE MM. FOURET ET JAMET;

par M. E. CESÀRO, professeur à l'Université de Naples (*).

Les questions résolues par M. Fouret dans deux communications à l'Académie des sciences(**) peuvent être traitées par une analyse très simple, que je me propose d'exposer ici. Il s'agit d'abord de *déterminer le rayon de courbure* ρ *en un point* m *d'une conique, connaissant trois points* a_1, a_2, a_3 *de la courbe, et la tangente* mt. Par rapport à cette tangente et à la normale correspondante l'équation de la conique est de la forme

$$2\rho y = x^2 + pxy + qy^2.$$

Elle doit être vérifiée par les coordonnées x_i, y_i de a_i, $(i = 1, 2, 3,)$. Il faut donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 2\rho y_1 - x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 2\rho y_2 - x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 2\rho y_3 - x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

c'est-à-dire

$$2\rho y_1 y_2 y_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}.$$

On sait que le déterminant du premier membre représente le double de l'aire σ du triangle $a_1 a_2 a_3$. L'autre déterminant a pour valeur, au signe près,

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_3 y_1 - x_1 y_3)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 8\sigma^3 \mu_1 \mu_2 \mu_3,$$

(*) Nous sommes heureux de réparer ici un *lapsus memoriae* que nous avons commis dans notre note sur le rayon de courbure de certaines courbes planes (Suppl. de juin) : une formule que nous croyions nouvelle se déduit immédiatement d'une égalité signalée par M. Cesáro dans *Mathesis*, 1890, p. 190.

M. Gob nous a communiqué récemment une démonstration de la formule (2) de M. Cesáro, identique à celle que nous publions ci-après, et une démonstration géométrique que nous ferons connaître prochainement. (J. N.).

(**) *Comptes rendus*, 14 et 21 avril 1890.

μ_1, μ_2, μ_3 étant les coordonnées barycentriques de m. Donc

$$\rho = -2\sigma^2 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{y_1y_2y_3}. \qquad (2)$$

Nous retrouvons ainsi une formule obtenue ailleurs(*) par une voie tout à fait différente. Afin de mettre la relation (2) sous la forme que lui a donnée M. Fouret, remarquons que, si u_i, ω_i sont les coordonnées polaires de a_i, on a

$$y_i = u_i \sin\omega_i, \quad 2\sigma\mu_1 = -u_2u_3 \sin(\omega_2 - \omega_3), \text{ etc.}$$

En conséquence

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4\sigma}{u_1u_2u_3} \cdot \frac{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3}{\sin(\omega_2 - \omega_3)\sin(\omega_3 - \omega_1)\sin(\omega_1 - \omega_2)},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4 \text{ triangle } a_1a_2a_3}{ma_1 \cdot ma_2 \cdot ma_3} \cdot \frac{\sin a_1mt \cdot \sin a_2mt \cdot \sin a_3mt}{\sin a_2ma_3 \cdot \sin a_3ma_1 \cdot \sin a_1ma_2}.$$

C'est la formule de M. Fouret.

De même, si la conique, au lieu de *passer par les points* a_1, a_2, a_3, est assujettie à *toucher les droites* a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2, on doit remplacer la condition (1) par celle-ci :

$$\begin{vmatrix} \rho(y_2 - y_3)^2 + 4\sigma\mu_1(x_2 - x_3) & \mu_1(y_2 - y_3) & \mu_1^2 \\ \rho(y_3 - y_1)^2 + 4\sigma\mu_2(x_3 - x_1) & \mu_2(y_3 - y_1) & \mu_2^2 \\ \rho(y_1 - y_2)^2 + 4\sigma\mu_3(x_1 - x_2) & \mu_3(y_1 - y_2) & \mu_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le terme indépendant de ρ est égal au produit de $4\sigma\mu_1\mu_2\mu_3$ par

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ \mu_2 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ \mu_3 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 2\sigma.$$

D'autre part, le coefficient de ρ est décomposable en un produit de trois facteurs analogues à celui-ci :

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & y_3 - y_1 \\ \mu_3 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = y_1.$$

(*) *Mathesis*, 1890, p. 190.

Donc

$$\rho = -8\sigma^2 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{y_1y_2y_3}.$$

La comparaison avec (2) montre que *si, de deux coniques tangentes, l'une est inscrite et l'autre circonscrite à un même triangle, la courbure de la seconde conique est quadruple de celle de la première, au point de contact.*

M. Fouret se sert des résultats qui précèdent pour construire les rayons de courbure des *lignes anharmoniques*, c'est-à-dire des courbes caractérisées par la propriété suivante : *Toute tangente forme un rapport anharmonique constant avec les droites qui joignent le point de contact à trois points fixes.* On exprime cela en écrivant

$$\alpha_1 \cot\omega_1 + \alpha_2 \cot\omega_2 + \alpha_3 \cot\omega_3 = 0, \tag{3}$$

les nombres α étant assujettis à la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \tag{4}$$

La différentiation de (3), faite en se rappelant que

$$\frac{d\omega_i}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\omega_i}{u_i},$$

donne

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\alpha_1}{\sin^2\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\sin^2\omega_2} + \frac{\alpha_3}{\sin^2\omega_3}\right) = \frac{\alpha_1}{y_1} + \frac{\alpha_2}{y_2} + \frac{\alpha_3}{y_3}. \tag{5}$$

D'ailleurs, les relations (3) et (4) montrent que α_1, α_2, α_3 sont proportionnels à

$$\cot\omega_2 - \cot\omega_3, \quad \cot\omega_3 - \cot\omega_1, \quad \cot\omega_1 - \cot\omega_2.$$

Or on a

$$\cot\omega_2 - \cot\omega_3 = \frac{\sin(\omega_2 - \omega_3)}{\sin\omega_2 \sin\omega_3} = -\frac{2\sigma\mu_1}{y_2y_3}. \tag{6}$$

Il en résulte

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \mu_1y_1 : \mu_2y_2 : \mu_3y_3; \tag{7}$$

puis la relation (5) devient

$$\rho = \mu_1\frac{u_1^2}{y_1} + \mu_2\frac{u_2^2}{y_2} + \mu_3\frac{u_3^2}{y_3}. \tag{8}$$

On peut maintenant construire le rayon de courbure en transportant les masses coordonnées sur la normale, perpendiculairement aux droites qui joignent les sommets du triangle au point du contact. Dans leurs nouvelles positions *ces masses ont leur centre de gravité au centre de courbure*. Pour retrouver l'intéressante propriété, signalée par M. Fouret, il faut donner à la relation (8) une autre forme. On peut écrire

$$\rho = \mu_1 y_1 \cot^2\omega_1 + \mu_2 y_2 \cot^2\omega_2 + \mu_3 y_3 \cot^2\omega_3,$$

ou bien, en employant (6),

$$\rho = \frac{y_1 y_2 y_3}{2\sigma} \begin{vmatrix} 1 & \cot\omega_1 & \cot^2\omega_1 \\ 1 & \cot\omega_2 & \cot^2\omega_2 \\ 1 & \cot\omega_3 & \cot^2\omega_3 \end{vmatrix},$$

et, enfin,

$$\rho = -\frac{u_1 u_2 u_3}{2\sigma} \cdot \frac{\sin(\omega_2 - \omega_3)\sin(\omega_3 - \omega_1)\sin(\omega_1 - \omega_2)}{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3}.$$

Par conséquent, *le rayon de courbure en un point m d'une ligne anharmonique est le double* (la moitié) *du rayon de courbure de la conique circonscrite* (inscrite) *au triangle fondamental, qui touche en m la ligne considérée.*

Les segments détachés sur la tangente par les côtés du triangle, à partir du point de contact, sont

$$p_1 = -\frac{2\sigma\mu_1}{y_2 - y_3}, \quad p_2 = -\frac{2\sigma\mu_2}{y_3 - y_1}, \quad p_3 = -\frac{2\sigma\mu_3}{y_1 - y_2}.$$

Or on a, en vertu de la proportion (7),

$$\frac{\alpha_1}{p_1} : \frac{\alpha_2}{p_2} : \frac{\alpha_3}{p_3} = y_1(y_2 - y_3) : y_2(y_3 - y_1) : y_3(y_1 - y_2).$$

Donc

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \frac{\alpha_3}{p_3} = 0. \tag{9}$$

Nous aurions pu écrire immédiatement cette relation. Elle exprime, en effet, la propriété corrélative de la propriété de définition, à savoir : *Tout point de la courbe fait un rapport anharmonique constant avec les points où la tangente est rencontrée par trois droites fixes.* Il est d'ailleurs évident que les deux propriétés appartiennent à la même courbe. L'inté-

gration de (9) conduit à l'équation barycentrique de nos lignes. Il faut d'abord se rappeler que, à cause des relations connues,

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{y_i}{\rho} - 1, \quad \frac{dy_i}{ds} = -\frac{x_i}{\rho},$$

on a aussi

$$\frac{d}{ds} \log \mu_i = -\frac{1}{\rho_i}.$$

Il est donc évident qu'en intégrant (9) on obtient

$$\mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \mu_3^{\alpha_3} = \textit{constante}.$$

Toutes les propriétés qui précèdent sont renfermées comme cas particuliers dans un théorème de M. Jamet, concernant les courbes représentées par l'équation

$$\alpha_1 \mu_1^n + \alpha_2 \mu_2^n + \alpha_3 \mu_3^n = 0, \tag{10}$$

les coefficients α étant quelconques. Une première différentiation donne

$$\alpha_1 \mu_1^{n-1} (y_2 - y_3) + \alpha_2 \mu_2^{n-1} (y_3 - y_1) + \alpha_3 \mu_3^{n-1} (y_1 - y_2) = 0. \tag{11}$$

En différentiant encore une fois, on obtient

$$\frac{1}{\rho} [\alpha_1 \mu_1^{n-1} (x_2 - x_3) + \cdots] + \frac{1-n}{2\sigma} [\alpha_1 \mu_1^{n-2} (y_2 - y_3)^2 + \cdots] = 0. \tag{12}$$

Cela étant, on a, en vertu de (10) et de (11),

$$\alpha_1 \mu_1^{n-1} : \alpha_2 \mu_2^{n-1} : \alpha_3 \mu_3^{n-1} = y_1 : y_2 : y_3.$$

Il en résulte, par substitution dans (12),

$$(1 - n)\, \rho = \textit{constante},$$

pour toutes les courbes (10), qui se touchent en un point donné. On sait, du reste, que l'équation (10) représente une conique *circonscrite*, *inscrite* ou *conjuguée* au triangle fondamental suivant que $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$. Elle peut représenter aussi, pour $n = 0$, une *ligne anharmonique*, pourvu qu'il y ait, entre les coefficients α, la relation (4). En effet,

$$\lim_{n=0} \frac{1}{n} \Sigma \alpha_i \mu_i^n = \lim \Sigma \alpha_i \frac{\mu_i^n - 1}{n} = \log \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \mu_3^{\alpha_3}.$$

Si l'on appelle ρ', ρ'', ρ''', ρ^{IV} les rayons de courbure de ces quatre espèces de lignes, en leur point de contact, on a

$$4\rho' = \rho'' = -2\rho''' = 2\rho^{IV}.$$

En général,

$$\rho = \frac{2\rho'}{1-n}.$$

C'est le théorème de M. Jamet.

QUESTIONS DE MÉCANIQUE,

par M. L. Meurice, docteur en sciences physiques et mathématiques.

1. Soient pris sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC trois couples de *points isotomiques* M et M', N et N', P et P'; ainsi M et M' sont symétriques par rapport au milieu de BC, etc. Désignons par X, Y, Z les milieux des droites N'P, P'M, M'N : *les droites* AX, BY, CZ *concourent en un même point et sont égales et parallèles aux côtés d'un même triangle.*

En effet, considérons six forces représentées en grandeur et en direction par AN', AP, BP', BM, CM', CN; elles se font équilibre comme étant opposées deux à deux. Mais les résultantes de AN' et AP, de BP' et BM, de CM' et CN sont dirigées suivant AX, BY, CZ et doubles de ces droites, donc elles concourent en un même point. De plus le polygone de ces trois résultantes partielles se ferme de lui-même.

On peut aussi observer que les triangles XYZ, ABC ont même centre de gravité, et que les droites joignant B et C respectivement aux milieux des droites P'M' et MN se coupent également sur AX(*).

2. Soient M et M', N et N', P et P', Q et Q' des couples de points isotomiques pris respectivement sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un

---

(*) Si l'on pose $BM = \alpha$, $CN = \beta$, $AP = \gamma$, et $MC = \alpha'$, $NA = \beta'$, $PB = \gamma'$, les coordonnées normales du point de concours des droites AX, BY, CZ sont $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; les droites joignant A, B, C, aux milieux des droites N'P, P'M', MN concourent en un point ayant pour coordonnées normales $\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, etc. (J. N.).

quadrilatère plan; et soient X, Y, Z, U les milieux des droites M'N, N'P, P'Q, Q'M.

Les droites BX, CY, DZ, AU *représentent quatre forces en équilibre ;* autrement dit, *on peut former un quadrilatère dont les côtés sont égaux et parallèles à ces droites.*

Les deux quadrilatères ABCD, XYZU ont même centre des moyennes distances : les droites joignant les milieux des côtés opposés ou ceux des diagonales de l'un ou l'autre se coupent mutuellement en parties égales.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du premier.

3. La proposition précédente s'applique à un quadrilatère gauche. On en déduit que *les droites* BX, CY, DZ, AU *forment un quadruple hyperboloïdique* (*).

D'après un théorème connu, les faces homologues des tétraèdres BCDA, XYZU se coupent suivant quatre droites formant un quadruple hyperboloïdique.

4. Soient pris sur les six arêtes d'un tétraèdre AB, AC, AD, BC, CD, DB des couples de points isotomiques M et M', N et N', P et P', Q et Q', R et R', S et S' : *Les droites joignant les points* A, B, C, D *respectivement aux centres de gravité* X, Y, Z, U *des triangles* MNP, M'QS, Q'N'R, P'S'R' *sont les génératrices d'un même hyperboloïde, et l'on peut construire un quadrilatère dont les côtés sont égaux et parallèles à ces droites.*

En effet, la résultante de trois forces représentées par AM, AN, AP est dirigée suivant AX et égale à 3AX, etc. Les droites AX, BY, CZ, DU sont donc les résultantes partielles de douze forces représentées par $\frac{1}{3}$ AM, $\frac{1}{3}$ AN, $\frac{1}{3}$ AP, etc., forces qui sont, deux à deux, opposées; donc le système des forces AX, BY, CZ, DU est en équilibre.

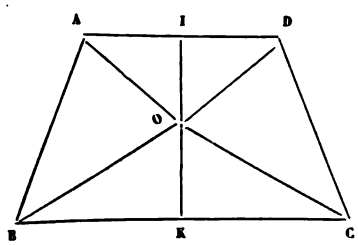
(*) Si les quatre forces BX, CY, DZ, AU, sont en équilibre, toute droite *m* qui rencontre les lignes d'action des trois premières forces doit rencontrer celle de la quatrième; car si l'on suppose les forces appliquées à un solide qui ne peut que tourner autour de *m*, les trois premières sont détruites par la résistance de l'axe de rotation; par suite, l'équilibre exige que la quatrième le soit aussi.

*ENCORE QUELQUES PIÈGES MATHÉMATIQUES.

1. *Un piège géométrique.* Parmi les *pièges mathématiques* tels que ceux que vous signalez dans *Mathesis* (p. 169), connaissez vous le suivant, qui m'avait été communiqué il y a bien des années déjà par notre pauvre ami Edouard Lucas ? J'ignore si la question était de lui ; dans tous les cas elle est intéressante.

Un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux AB et CD, nous allons démontrer que *les deux autres sont parallèles.*

Sur les milieux I, K des deux côtés AD, BC élevons des perpendiculaires qui se rencontrent en O, et joignons OA, OB, OC, OD. Alors OA = OD, OB = OC, et comme AB = CD par hypothèse, les deux triangles OAB, OCD sont égaux. Les angles AOB, COD le sont donc aussi. Comme



$$\text{IOD} = \text{IOA}, \quad \text{KOB} = \text{KOC},$$

il en résulte que

$$\text{IOA} + \text{AOB} + \text{BOK} = 180^\circ,$$

c'est à dire que IOK est une ligne droite ; et les deux côtés AD, BC étant perpendiculaires à cette droite sont parallèles (Extrait d'une lettre de M. Laisant).

2. *Quelques paradoxes algébriques.* 1° Si a est différent de b, $x - a$ est aussi différent de $x - b$, et $(x - a)^2$ différent de $(x - b)^2$. L'équation $(x - a)^2 = (x - b)^2$ semble donc impossible. Cependant, en effectuant les carrés, on a

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2bx + b^2, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

2° Soit l'équation

$$\frac{3x - b}{3x - 5b} = \frac{3a - 4b}{3a - 8b}.$$

Ces fractions sont évidemment différentes de l'unité. Cependant, en les soustrayant terme à terme, on trouve qu'elles sont égales chacune à

$$\frac{3x - 3a + 3b}{3x - 3a + 3b}$$

ou à 1.

3° Soit le système d'équations

$$\frac{x-a+c}{y-a+b}=\frac{b}{c},\quad \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}.$$

En soustrayant les fractions terme à terme, on trouve

$$\frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{b}{c},\quad \frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{a+b}{a+c}.$$

On a donc deux quantités

$$\frac{b}{c}\quad\text{et}\quad\frac{a+b}{a+c}$$

égales à une troisième sans être égales entre elles.

4° Soit l'équation

$$\frac{x+1}{a+b+1}=\frac{x-1}{a+b-1}.$$

Si de chaque antécédent on soustrait le conséquent, ou si de chaque conséquent on soustrait l'antécédent, on a

$$\frac{x-a-b}{a+b+1}=\frac{x-a-b}{a+b-1}\quad\text{ou}\quad\frac{x+1}{a+b-x}=\frac{x-1}{a+b-x}.$$

On a donc deux fractions égales, qui ont le même numérateur et des dénominateurs différents, ou le même dénominateur et des numérateurs différents.

5° L'identité $a^2-a^2=a^2-a^2$ peut s'écrire $a(a-a)=(a+a)(a-a)$ d'où en divisant par $a-a$, $a=a+a$ ou $a=2a$, et, en particulier, $1=2$. Ajoutant 1, on a ensuite $1+1=2+1$ ou $2=3$, puis $3=4$, et ainsi de suite. Donc *tous les nombres sont égaux.* (E. Gelin.)

---

*LIMITE OU GÉNÉRATRICE.

On emploie, en mathématiques, les points suspensifs : ....., dans deux sens différents, le plus souvent sans définir nettement ni l'une ni l'autre signification attribuée à ce symbole. Il en résulte que dans la théorie des fractions périodiques, des progressions, des fractions continues, des séries, des produits infinis, beaucoup d'élèves comprennent imparfaite-

ment la vraie portée de certains raisonnements, où l'on se sert des points suspensifs.

Nous croyons donc utile de donner dans *Mathesis* quelques notions précises sur les deux significations de ces points.

Supposons que l'on divise le binôme $1+x$ par $1-x$, d'après le procédé habituel usité en algèbre. On trouvera

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots\cdots + 2x^n + \frac{2x^{n+1}}{1-x} \qquad (A)$$

Si, pour une raison quelconque, on n'a besoin que de la loi de formation du quotient, et non du reste, on écrira plus simplement

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots\cdots \qquad (1)$$

Les points signifient que les termes du quotient se forment d'après la loi que les termes écrits explicitement mettent en évidence. Cette loi d'ailleurs suffit pour faire retrouver, sans peine, le reste et même la fraction algébrique qui a donné naissance au quotient illimité, comme on peut le voir dans les Traités d'Algèbre (LEFÉBURE, *Algèbre*, ch. XXIV).

Dans le sens que nous venons d'indiquer, la formule (1) est vraie pour toute valeur de x, même pour $x = 1$. En effet, il n'est pas plus difficile de faire une division algébrique par $1-x$, quand $x = 1$, que si $x = \frac{1}{2}$, ou $x = -3$; car l'égalité (A), considérée comme exprimant le résultat d'une division algébrique, signifie que l'on a identiquement

$$1 + x = (1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n)(1 - x) + 2x^{n+1}$$

et celle-ci subsiste pour toute valeur de x.

Mais on peut donner à l'égalité (1) un autre sens. *Si x, en valeur absolue, est plus petit que l'unité,* on a

$$lim \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0,$$

pour n croissant indéfiniment. Par suite, on a aussi

$$\frac{1+x}{1-x} = lim\,(1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n) \qquad (2)$$

ce que l'on peut écrire, *par convention,* sous la forme

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots \qquad (1)$$

Les points remplacent ici le mot *limite* et les parenthèses de la relation (2).

L'expression

$$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$$

a donc deux sens distincts : elle représente ou bien la *limite* de

$$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^n,$$

dans le cas où x est compris entre — 1 et 1 pour n croissant indéfiniment, ou la fraction algébrique qui est la *fonction génératrice* d'un développement de la forme (1).

***

En arithmétique élémentaire, on rencontre les points suspensifs avec les deux sens indiqués plus haut, comme nous l'avons déjà fait remarquer (*Mathesis*, 1881, *Théorie des fractions périodiques*, I, pp. 103-106).

Quand on réduit $\frac{4}{9}$ en fraction décimale, on trouve

$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots 4_n + \frac{4}{9 \times 10^n},$$

ce que l'on écrit, sous la forme

$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots\ldots$$

$\frac{4}{9}$ est la fraction *génératrice* de 0,444..... On voit immédiatement que l'on a aussi

$$\frac{4}{9} = \lim (0{,}444\ldots 4_n)$$

et l'on peut encore écrire cette relation sous la forme

$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$$

Il en est de même dans tous les cas : la fraction *génératrice* d'une fraction décimale périodique est toujours égale à la *limite* de cette fraction périodique.

La réciproque est-elle vraie, *la limite d'une fraction périodique*, $0{,}44\ldots 4_n$ *ou* $0{,}539\ldots 9_n$ *peut-elle toujours être regardée comme la génératrice de cette fraction périodique?* Oui, car on peut prouver *directement*

que toute fraction périodique a une génératrice, et dès lors, elle a aussi une limite égale à cette génératrice, d'après la remarque faite plus haut.

On peut aussi prouver *directement* que toute fraction périodique a une limite, mais il est moins facile d'en déduire que la limite est aussi la génératrice de la fraction périodique(*).

***

Halphen a démontré(**) que la série d'Abel

$$\varphi(0) + x\varphi'(\beta) + x\frac{(x-2\beta)}{1.2}\varphi''(2\beta) + \cdots + x\frac{(x-n\beta)^{n-1}}{1.2..n}\varphi^n(n\beta) + \cdots$$

où β est une quantité arbitraire, a toujours une limite différente de $\varphi(x)$, quand $\varphi(x)$ est une fraction rationnelle.

Dans ce cas remarquable, selon que l'on donne aux points suspensifs l'un ou l'autre de leurs deux sens, on trouve donc un résultat différent. *La limite de la série est toujours différente de la génératrice.*

Il faut donc se garder d'étendre à toutes les séries la remarque faite plus haut sur les fractions périodiques. Même quand la limite et la génératrice d'une suite illimitée sont finies, elles peuvent être distinctes.

Il faut se garder aussi de croire, sans examen préalable, qu'au siècle passé, Euler, Lagrange et Laplace ont manié des séries divergentes, chaque fois qu'ils ont employé des formules analogues à (1), quand x surpasse l'unité; car ils se servaient des points suspensifs, non seulement dans le sens de *limite*, mais aussi dans celui de *génératrice*. (P. M.)

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Recueil de problèmes de mathématiques par M. C. A. Laisant, Docteur-ès-Sciences. Tome II. *Géométrie* et *Géométrie descriptive*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893 (X-206 p. in-8°). Prix : 5 francs.

Ce volume contient les énoncés de toutes les questions (au nombre de 813) de *Géométrie* proprement dite, soit à deux, soit à trois dimensions et ceux de quelques exercices de *Géométrie descriptive*, qui ont été proposés dans les *Nouvelles Annales*,

---

(*) Dans une foule de traités élémentaires, on confond *génératrice* et *limite* et, par suite, on admet cette dernière proposition sans la démontrer.

(**) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1882, t. X, pp. 82-84).

la *Nouvelle Correspondance*, le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, fondé par Bourget et continué par M. de Longchamps, et *Mathesis*; les énoncés sont suivis du renvoi à la solution lorsque celle-ci a paru dans l'une de ces publications. Un nombre relativement assez considérable de questions se rapportent aux coniques, mais elles ont un caractère élémentaire et peuvent être traitées synthétiquement.

Nous ne pourrions mieux recommander les qualités de ce livre qu'en empruntant ces paroles de la Préface :

« La très grande variété des questions de Géométrie contribuera, nous l'espérons à donner à ce Recueil une réelle utilité, en présentant aux professeurs un large choix d'exercices. Cette collection pourra fournir aussi à des élèves d'élite l'occasion de s'exercer spontanément à la solution des problèmes; elle attirera enfin, sur certaines questions oubliées, une attention qui profitera à l'enseignement comme à la Science. »

Saggio d'introduzione alla teoria delle quantita complesse geometricamente rappresentate per B. CARRARA. Cremona, Premiata Tip. Lit. Fezzi, 1898. (XXV-152 pages in 8°). Prix : fr. 2,50.

L'*Introduction* (pag. V-XXV) renferme un historique assez complet de la représentation géométrique d'une quantité complexe (*).

La *Première Partie* est divisée en deux chapitres : l'un (pp. 7-28) expose les *notions fondamentales* sur les quantités imaginaires (représentation géométrique de $\alpha + \beta i$); l'autre (pp. 28-66), les opérations sur les quantités géométriques : addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, extraction des racines, équations binômes et racines de l'unité.

La *Seconde Partie* comprend quatre chapitres : I. Sur quelques séries (pp. 69-87) (**); II. Fonctions d'une variable complexe (pp. 88-117); III. Équations algébriques (pp. 118-133); IV. Intégrales des fonctions synectiques (pp. 134-152).

Le livre de M. Carrara constitue une introduction claire et simple, mais peut-être çà et là, trop peu rigoureuse, à la théorie complète des quantités complexes; il se rapproche beaucoup de la *Théorie élémentaire des quantités complexes* par Houël.

(*) Voici quelques petites erreurs qui se sont glissées dans cette introduction et que nous signalons à l'auteur. — P. VII. L'*Essai* d'Argand n'a pas été réimprimé, mais résumé et complété dans les *Annales de Gergonne*. — P. XII. Gauss est né en 1775. — P. XV. Le livre de Thomae (et non Tomae) a eu trois éditions. — P. XVII. L'ouvrage cité dans la note 2e est la seconde édition de celui qui est cité dans le texte, lequel est lui-même un remaniement d'un mémoire célèbre des deux auteurs, publié quelques années auparavant et beaucoup plus suggestif que les deux éditions citées. — P. XXI. Lisez Siebeck, Scheffler; p. XXII, Callandreau, Ruchonnet, de Saint Venant. Le dernier a écrit sur la composition des droites un mémoire original et de la plus grande portée qui vaut la peine d'être cité.

(**) Les raisonnements des § 4 et 5 ne sont pas suffisamment rigoureux. Il en est de même de ceux de plusieurs nos suivants (105, 106, 120, 140). Sur ces points, le livre de M. Carrara doit être complété. Voir par exemple, la nouvelle édition du *Cours d'analyse* de Jordan.

La risoluzione dei Problemi numerici e geometrici per Dott. R. BETTAZI. — Torino-Roma-Milano-Firenze-Napoli, G. B. Paravia, 1893 (VIII-100 p. in-8°). Prix : 2 fr.

L'auteur a consulté les ouvrages suivants : *Des méthodes en géométrie*, par P. Serret; *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, par Duhamel ; *Traité de Géométrie*, par Rouché et de Comberousse ; *Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de géométrie*, par Petersen, *Avviamento alle risoluzione delle questioni geometriche*, par Pastore. Il s'étend longuement, peut-être trop, sur les généralités ; les exemples développés pourraient être plus nombreux et les exercices proposés font complètement défaut. Néanmoins, nous croyons que le livre de M. Bettazzi peut rendre des services aux professeurs et aux élèves des établissements italiens d'instruction moyenne, et qu'il sera lu avec profit aussi ailleurs qu'en Italie.

Recueil de calculs logarithmiques à l'usage des candidats aux baccalauréats d'ordre scientifique et aux diverses écoles du gouvernement : Saint-Cyr, navale, centrale, polytechnique, mines, ponts et chaussées, etc., par P. BARBARIN, professeur agrégé au lycée de Bordeaux. Paris, Nony, 1893 (258 p. in-4°). Prix : 3 fr. 50.

Voici la table des matières de cet excellent recueil que nous recommandons vivement aux professeurs et aux élèves.

CHAP. I. Equations exponentielles. Intérêts composés, annuités : 8 exercices traités, 11 exercices proposés. — II. Équations trigonométriques : 14 ex. traités, 17 proposés. — III. Résolution des triangles rectangles et applications : 11 ex. traités, 14 proposés. — IV. Résolution des triangles quelconques. 1. On donne un côté et les angles : 4 ex. traités, 7 proposés. 2. On donne deux côtés et l'angle compris : 13 ex. traités, 21 proposés. 3. On donne les trois côtés : 6 ex. traités, 9 proposés. 4. On donne deux côtés et l'angle opposé à l'un : 4 ex. traités, 5 proposés. 5. On donne des éléments autres que les angles et les côtés : 10 ex. traités, 8 proposés. — V. Résolution des quadrilatères et problèmes divers : 6 ex. traités. — VI. Problèmes sur le terrain : 8 ex. traités. — VII. Cosmographie, 5 ex. traités ; table des logarithmes de $1 + \alpha t$; physique, 3 ex. traités. — VIII. Problèmes divers, 7 ex. proposés ; problèmes sur le terrain et cosmographie, 7 ex. proposés.

Les exemples traités ou proposés dans ce Recueil sont presque tous choisis parmi ceux qui ont été proposés aux concours et examens de ces dernières années.

Il faut, dit l'auteur dans la Préface, que les élèves parviennent à asseoir directement leurs calculs sur le papier, avec ordre et précision, et cela, sans faire aucun brouillon. Nous sommes persuadé qu'ils acquerront en peu de temps cette faculté s'ils refont quelques-uns des exemples traités par M. Barbarin et appliquent ensuite les mêmes méthodes à quelques exercices proposés(*).

(*) Le recueil de M. Barbarin sera d'autant plus utile aux jeunes gens qui veulent entrer dans les écoles spéciales belges que l'on exige, depuis 1891, à l'examen d'entrée, la résolution complète d'une question de trigonométrie, calculs numériques compris.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×Question 786.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 216.)

Les côtés AB, BC, CD, DA *d'un quadrangle sphérique* ABCD *sont divisés aux points* E, F, G, H *de manière que*

$$\frac{\sin AE}{\sin BE}=\frac{\sin CF}{\sin BF}=\frac{\sin CG}{\sin DG}=\frac{\sin AH}{\sin DA}=\lambda.$$

Démontrer que les arcs de grand cercle EG, FH *se coupent en un point* I *de l'arc joignant les milieux* K, L *des diagonales* AC, BD. *Si ces diagonales sont égales, on a* $\frac{\sin KI}{\sin LI}=\lambda$. (J. Tate.)

Solution par M. Déprez. 1° Les arcs de grand cercle EL, GK se coupent sur le côté AD. En effet, si EL rencontre AD en Q, le triangle ABD coupé par l'arc transversal EL donne

$$\frac{\sin AE}{\sin BE}\times\frac{\sin BL}{\sin DL}\times\frac{\sin DQ}{\sin AQ}=1,$$

d'où $\frac{\sin AQ}{\sin DQ}=-\lambda$. De même l'arc GK partage AD en deux segments dont le rapport des sinus est égal à $-\lambda$, etc.

2° Considérons maintenant le triangle QLK coupé par l'arc transversal EG ; si I est le point de rencontre de EG avec LK, nous aurons

$$\frac{\sin EL}{\sin EQ}\times\frac{\sin IK}{\sin IL}\times\frac{\sin GQ}{\sin GK}=1. \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles QDL, QAK coupés respectivement par les arcs AB, DC donnent

$$\frac{\sin LE}{\sin QE}\times\frac{\sin QA}{\sin DA}\times\frac{\sin DB}{\sin LB}=1, \qquad (2)$$

$$\frac{\sin QG}{\sin KG}\times\frac{\sin KC}{\sin AC}\times\frac{\sin AD}{\sin QD}=1. \qquad (3)$$

(*) Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les mentionner à la page 149, de bonnes solutions de la question 840, par MM. H. Brocard et Absolonne, des questions 845 et 850 par M. Absolonne.

Substituons dans (1) les valeurs des rapports $\frac{\sin LE}{\sin QE}$, $\frac{\sin QG}{\sin KG}$ tirées de (2) et (3); il vient

$$\frac{\sin IK}{\sin IL} \times \frac{\sin AD}{\sin AQ} \times \frac{\sin LB}{\sin DB} \times \frac{\sin AC}{\sin KC} \times \frac{\sin QD}{\sin AD} = 1,$$

relation qui, à cause de $\frac{\sin AQ}{\sin DQ} = -\lambda$, se réduit à

$$\frac{\sin IK}{\sin IL} = -\lambda \frac{\cos \frac{BD}{2}}{\cos \frac{AC}{2}}.$$

La forme même de cette égalité montre que l'arc FH rencontre LK au même point I.

Autre solution. Soit O le centre de la sphère. Attachons aux points A, C des masses égales à l'unité, et aux points B, D des masses égales à λ. Pour trouver le centre de gravité de ces quatre masses nous pouvons procéder de différentes manières.

1° Les masses attachées aux points A et C peuvent être remplacées par une masse égale à 2 et atttachée au milieu *k* de la droite AC; celles qui se trouvent en B et D, par une masse égale à 2λ et attachée au milieu *l* de la droite BD; enfin, les masses qui se trouvent en *k* et *l* ont pour centre de gravité le point *i* qui divise *kl* en deux segments proportionnels à λ et 1. Mais O*k* passe par K, O*l* par L; donc O*i* est situé dans le plan OLK et rencontre l'arc LK en un certain point I.

2° On peut remplacer les masses fixées en A et B par une masse $1 + \lambda$ fixée au point *e* qui divise AB en deux segments A*e*, *e*B dans le rapport $\lambda : 1$; comme OA = OB, on a A*e* : *e*B = sin AO*e* : sin *e*OB et par suite, O*e* passe par E. Semblablement les masses fixées en CD peuvent être remplacées par une masse unique $1 + \lambda$, attachée au point *g* qui divise la droite CD dans le rapport $\lambda : 1$. Il résulte de là que le centre de gravité *i* des quatre masses est au milieu de la droite *eg;* donc l'arc EG passe par I.

3° En combinant d'abord les masses placées en B et C, puis celles des points A et D, on voit que *i* est au milieu de la droite joignant les points qui divisent les cordes BC, AD dans le rapport $1 : \lambda$; par conséquent, l'arc FH passe par I.

Si BD = AC, le triangle O*lk* est isoscèle et l'on a :

$$\lambda = \frac{ki}{il} = \frac{\sin KOi}{\sin iOL} = \frac{\sin KI}{\sin IL}.$$

Une remarque analogue est applicable lorsque AB = CD, ou AD = BC; I est alors au milieu de l'arc EG ou de l'arc FH. (J. N.)

Question 827.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

On joint un point M *d'une ellipse à l'un des sommets* A *du grand axe. Du point* P, *pôle de* MA *par rapport à l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire* PQ *sur la parallèle au grand axe passant par* M, *et une perpendiculaire* PR *sur la parallèle au petit axe passant par le point* M', *symétrique de* M *par rapport au centre. Le rectangle des segments* PQ *et* PR *est équivalent à celui formé par l'ordonnée et l'abscisse du point* M, *relatives aux axes.* (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Bellens, Quint, Déprez *et* Greenstreet.

Équation de l'ellipse :

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Coordonnées de M :

$$x' = a\cos\alpha, \quad y' = b\sin\alpha.$$

Tangente en M :

$$a\sin\alpha \,.\, y + b\cos\alpha \,.\, x - ab = 0.$$

Coordonnées de P :

$$a, \quad \frac{b(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Distance PQ :

$$b\sin\alpha - \frac{b(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{b\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Distance PR :

$$a + a\cos\alpha = a(1+\cos\alpha).$$

On a donc

$$PQ \,.\, PR = a \,.\, b \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = x'y'.$$

Solution par MM. Retali, Droz Farny, Vladimireau, Camus (Dinant) et Mˡˡᵉ de Haas. Soient x', y' les coordonnées de M; on a :
Équation de MP :

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

Coordonnées de P :

$$a, \quad \frac{a - x'}{a}\frac{b^2}{y'}.$$

Distance PQ :

$$y' - \frac{a - x'}{a}\frac{b^2}{y'} = \frac{ay'^2 + b^2x' - ab^2}{ay'}.$$

Distance PR :

$$a + x'.$$

On a donc

$$\text{PQ} \cdot \text{PR} = \frac{(a + x')(ay'^2 + b^2x' - ab^2)}{ay'}$$

$$= \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 + ay'^2x'}{ay'} = x'y'.$$

Solution par M. Brocard. Soient (a, h) les coordonnées de P.
Équation de la polaire de P :

$$a^2hy + b^2ax = a^2b^2.$$

Coordonnées de M :

$$\alpha = a\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}, \quad \beta = \frac{2b^2h}{b^2 + h^2}.$$

On trouve ensuite

$$\text{PQ} = \beta - h = h\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}, \quad \text{PR} = \alpha + a = \frac{2b^2a}{b^2 + h^2},$$

$$\text{PQ} \cdot \text{PR} = \frac{2ab^2h(b^2 - h^2)}{(b^2 + h^2)^2} = \alpha\beta.$$

Remarque. Le théorème s'applique aussi à l'hyperbole. (Déprez.)

×Question 838.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 127.)

Si $N-1$ *et* $N+1$ *sont premiers, le nombre* $2N^2+2$, *somme de deux carrés, est aussi la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés, la somme de cinq carrés.* (E. CATALAN.)

Solution par M. MANDART. Tout nombre premier étant de la forme $6m \pm 1$, nous pouvons poser $N-1=6m-1$, $N+1=6m+1$. Il en résulte

$$\begin{aligned} 2N^2+2 &= (N+1)^2+(N-1)^2 = 72m^2+2 \\ &= 64m^2+(2m+1)^2+(2m-1)^2 \\ &= 36m^2+4m^2+(4m-1)^2+(4m+1)^2 \\ &= 9m^2+9m^2+4m^2+(5m-1)^2+(5m-1)^2 \end{aligned}$$

On peut encore observer que

$$\begin{aligned} 72m^2+2 &= 25m^2+25m^2+4m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2 \\ &= 49m^2+4m^2+m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2 \\ &= 25m^2+16m^2+9m^2+4m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2 \\ &= 16m^2+16m^2+9m^2+9m^2+4m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2). \end{aligned}$$

(J. N. et J. M.).

Question 842.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

Trouver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(x \sin\theta)\, d\theta. \qquad \text{(GREENSTREET).}$$

Solution par M. V. JAMET. Soit z l'intégrale cherchée. On trouve :

$$\frac{dz}{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{1+x^2\sin^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{1+x^2-x^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1+x^2}+x\cos 0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1+x^2}-x\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}}\left[\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cos\theta}{\sqrt{1+x^2}+x\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2x\sqrt{1+x^2}}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}\log(\sqrt{1+x^2}-x).$$

Soit maintenant $\sqrt{1+x^2} - x = t$. Pour toute valeur positive de x, t sera positive et inférieure à 1; et à deux valeurs de x égales et de signes contraires, répondront deux valeurs de z, égales et de signes contraires si toutefois on se borne à considérer la valeur de z qui s'annule avec x. Nous nous proposons d'exprimer z au moyen d'une série dont chaque terme sera une fonction de t, série convergente pour toute valeur de t comprise entre zéro et 1. A cet effet, nous observons que, z étant nul avec x, le résultat précédent équivaut à :

$$z = -\int_0^x \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \log(\sqrt{1+x^2} - x).\, dx = 2\int_1^t \frac{\log t.\, dt}{1-t^2}$$

$$= 2\int_1^t (1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2(n-1)}) \log t\, dt + 2\int_1^t \frac{t^{2n} \log t}{1-t^2} dt.$$

Si u varie de 1 à t, la fonction $\frac{\log u}{1-u^2}$, égale à $-\frac{1}{2}$ pour $u = 1$, est finie pour toute autre valeur de u; il y a donc un nombre μ, indépendant de n, au-dessous duquel reste constamment la valeur numérique de cette fonction, et l'intégrale

$$\int_1^t \frac{t^{2n} \log t}{1-t^2} dt$$

est numériquement inférieure à

$$\left| \mu \int_1^t t^{2n}\, dt \right| \quad \text{ou à} \quad \frac{\mu(1-t^{2n+1})}{2n+1}.$$

On en conclut que z est égale à la somme de la série

$$2\sum_{p=0}^{p=\infty} \int_1^t t^{2p} \log t\, dt$$

si toutefois cette série est convergente. Or

$$\int_1^t t^{2p} \log t\, dt = \frac{t^{2p+1} \log t}{2p+1} - \frac{1}{2p+1}\int_1^t t^{2p}\, dt$$

$$= \frac{t^{2p+1} \log t}{2p+1} - \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Donc la série que nous voulons étudier est égale à la somme des trois termes suivants :

$$\log t \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1} - \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

et chacun d'eux est égal à une série dont la convergence est évidente. D'ailleurs, deux de ces séries peuvent être sommées très facilement. On sait, en effet, que

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1}$$

est le développement de

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \quad \text{et que} \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

comme l'indique la comparaison des développements de cos x en série entière et en produit infini. Donc enfin

$$z = \log t . \log\frac{1-t}{1+t} + \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2}.$$

Quant à la série qui figure dans cette dernière expression, il ne me paraît pas possible d'exprimer sa somme en fonction de t, sans signe d'intégration. En effet, c'est une fonction de t dont la dérivée est égale à

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p}}{2p+1}$$

ou bien à

$$\frac{1}{t}\log\frac{1-t}{1+t}.$$

Or, cette fonction s'annule avec t. Donc elle est égale à

$$\int_0^t \frac{1}{t}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt .$$

Ajoutons que, pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, la fonction z est susceptible d'un développement en série entière. En effet, pour de telles valeurs de x :

$$\text{Arc tang}\,(x \sin\theta) = \frac{x}{1}\sin\theta - \frac{x^3}{3}\sin^3\theta + \frac{x^5}{5}\sin^5\theta - \cdots$$

et, par conséquent :

$$z = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta - \frac{x^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta + \frac{x^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, d\theta - \cdots$$

Mais

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\theta\, d\theta = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,2p}{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2p+1)}.$$

Donc, dans l'hypothèse actuelle,

$$z = x + \sum_{p=1}^{p=\infty} \cdot \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,2p}{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,2p+1} \cdot \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \cdot (-1)^p,$$

série convergente, même pour $x = \pm 1$, comme le montre l'application de la règle de Duhamel.

×Question 854.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 252.)

Soient O *le centre du cercle circonscrit*, I *le centre du cercle inscrit au triangle* ABC, A′ *le symétrique de* A *par rapport à* O. *Démontrer* 1° *que la somme des carrés des tangentes menées de* A *et* A′ *au cercle* I *est égale à* $4R^2 - 4Rr - 2r^2$, R *et* r *désignant les rayons des cercles* O *et* I; 2° *que la circonférence décrite de* A′ *comme centre avec le rayon* A′I *coupe la circonférence* O *en un point* L *tel que* $AL = \sqrt{AB \cdot AC}$. (TUCKER.)

Solution par MM. DROZ-FARNY et THIRY. 1° En appelant t et t' les tangentes en question, on a

$$t^2 = \overline{AI}^2 - r^2, \quad t'^2 = \overline{A'I}^2 - r^2,$$

d'où

$$t^2 + t'^2 = \overline{AI}^2 + \overline{A'I}^2 - 2r^2. \tag{1}$$

Mais

$$AI^2 + \overline{A'I}^2 = \overline{2IO}^2 + 2R^2 = 2(R^2 - 2Rr) + 2R^2, \tag{2}$$

donc

$$t^2 + t'^2 = 4R^2 - 4Rr - 2r^2. \qquad C.\,q.\,f.\,d.$$

2° $$\overline{AL}^2 = \overline{AA'}^2 - \overline{A'L}^2 = 4R^2 - \overline{A'I}^2. \tag{3}$$

Mais l'égalité (2) donne

$$\overline{A'I}^2 = 4R^2 - 4Rr - \overline{AI}^2.$$

L'égalité (3) devient donc

$$\overline{AL}^2 = \overline{4R}^2 - (4R^2 - 4Rr - \overline{AI}^2)$$
$$= 4Rr + \overline{AI}^2 = \frac{abc}{p} + \frac{bc(p-a)}{p} = bc. \qquad C.\,q.\,f.\,d.$$

Autre solution par MM. MANDART et DELEHAYE.

QUESTIONS D'EXAMEN.

585. Le cercle circonscrit au rectangle des axes d'une ellipse rencontre une tangente quelconque à cette courbe en deux points M, M' tels que les droites OM, OM' sont des diamètres conjugués. (CLIFFORD).

Les coordonnées des points M, M' vérifient les équations

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1;$$

par suite, l'égalité homogène

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}\right)^2 = 0$$

donne deux valeurs du rapport $\frac{y}{x}$, dont le produit est

$$\frac{b^4 a^4 - (a^2 + b^2) x'^2}{a^4 b^4 - (a^4 + b^2) y'^2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

y'^2 étant remplacé par $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$.

586. Résoudre le système

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = p, \quad \operatorname{tg}(x+y) = -p.$$

Maximum et minimum de p.

QUESTIONS PROPOSÉES.

880. On considère le triangle formé par les extrémités d'une corde d'une ellipse et le pôle de cette corde. Montrer que :

1° Si le pôle est sur une des diagonales du rectangle des axes, le cercle circonscrit au triangle passe par le centre de l'ellipse, et enveloppe en outre, une podaire du centre d'hyperbole.

2° Si le pôle est sur le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre, le cercle circonscrit au triangle a son centre sur le grand axe.

(E. N. BARISIEN.)

881. On décrit une conique Δ ayant pour centre le point M et passant par les points d'incidence des normales abaissées de M sur une parabole donnée. Trouver le lieu de M par la condition que la conique Δ passe par le sommet de la parabole. (E. N. Barisien.)

882. Soient A un sommet d'une ligne cycloïdale, et M un point appartenant à la même boucle. Démontrer que le rayon du cercle directeur, qui passe par le centre de courbure correspondant à M, détermine sur la tangente en ce point un segment égal à l'arc AM. (E. Cesáro.)

***883.** p étant un nombre premier; si pN est la somme de $p+1$ carrés, dont p soient égaux, N jouit de la même propriété. (E. Catalan.)

884. Soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ quatre masses attachées aux sommets d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et soient B_1 le centre de gravité des masses (μ_2, μ_3, μ_4), B_2 celui des masses (μ_3, μ_4, μ_1), etc.

Connaissant les points B_1, B_2, B_3, B_4 et les masses $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, déterminer le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Calculer les arêtes du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ en fonction de celles du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et des masses $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

885. On donne une circonférence O et un diamètre fixe AB. D'un point variable P de O comme centre on décrit une circonférence tangente à AB. Soit C le point de contact.

On demande : 1° l'enveloppe de l'axe radical des circonférences O et P; 2° le lieu de l'intersection de cet axe radical avec le rayon de contact PC; 3° le lieu des points d'intersection de la tangente en P au cercle O avec le cercle P. (Droz-Farny.)

***886.** Le nombre

$$1.2..3...(p-1)\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right\}$$

n'est divisible par p^2 que si p est un nombre premier supérieur à 3.

(G. Osborn.)

Rectifications. P. 137, ligne 5, au lieu de *Bachwitz*, lire *Baschwitz*; ligne 6, au lieu de $(ab'+a'b)^2$, lire $(ab'-a'b)^2$. P. 168. L'identité de la ligne 18, est signalée par M. Catalan, dans ses *Théorèmes et Problèmes de géométrie*. P. 182, ligne 6, en remontant, porter plus bas $s=$; ligne 8, en remontant, au lieu de *charge* lire *change*. P. 183, ligne 7, au lieu de *épicicloïde, donc* lire *épicycloïde, dont*. P. 185, ligne 23, au lieu de *nombre*, lire *membre*.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. APPELL;

par M. E. CESÀRO, professeur à l'Université de Naples.

Le théorème dont il s'agit a été énoncé comme *question proposée*, sous le n° 1626, dans les *Nouvelleo Annales*. Les rédacteurs de cette revue en ont publié(*) une démonstration très-simple, due à M. Soudée; mais nous ne croyons pas moins intéressantes (**) les deux démonstrations qui suivent.

Considérons deux séries divergentes, à termes positifs,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots,$$

et supposons que les séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

soient convergentes pour $|x| < 1$. Soient $f(x)$ et $g(x)$ leurs sommes. Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

on peut, après avoir fixé le nombre positif ε, arbitrairement petit, trouver un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$\left| \frac{a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \cdots}{b_{n+1} + b_{n+2}x + b_{n+3}x^2 + \cdots} - k \right| < \varepsilon,$$

x étant positif. D'autre part, le rapport

$$\frac{1 - \dfrac{1}{g(x)}[b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n]}{1 - \dfrac{1}{f(x)}[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{b_{n+1} + b_{n+2}x + b_{n+3}x^2 + \cdots}{a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \cdots}$$

a pour limite 1 lorsque, n ayant été fixé, on fait tendre x vers l'unité.

(*) Janvier-Février 1893.

(**) Quoique elles n'aient pu trouver place dans les *Nouvelles Annales*.

Donc, si petit que soit $\varepsilon' > 0$, on pourra trouver un nombre $\xi < 1$, tel que, pour $x > \xi$, on ait toujours

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \theta\varepsilon)(1 + \theta'\varepsilon'),$$

θ et θ' étant compris entre -1 et 1. Il en résulte que, si l'on se donne arbitrairement le nombre positif n, il existe une valeur de x, à partir de laquelle on a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < n.$$

Il suffit de prendre, par exemple, $\varepsilon = k\varepsilon' = \frac{1}{3}n$, pourvu que $n < 3k$.

Donc

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

De cette proposition connue, on déduit aisément le théorème énoncé par M. Appell.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

A cause de la divergence de la série, dont le terme général est a_n, cela ne peut arriver que pour $p \leq 1$.

Si l'on pose

$$g(x) = \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots,$$

on a

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

Soit, pour un instant, $f(x) = (1-x)^{p-1}$, de sorte que

$$a_n = \frac{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)}{1.2.3.\ldots n}.$$

On obtient

$$\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = \lim_{n=\infty}\frac{n!\,n^{-p}}{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)} = \Gamma(1-p).$$

Donc

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = \lim_{n=1}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = k\Gamma(1-p).$$

C'est le théorème de M. Appell.

On parvient d'ailleurs d'une manière directe à ce dernier résultat en considérant la fonction

$$(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots$$

D'après les propriétés des coefficients binomiaux, la somme des $n+1$ premiers coefficients dans le développement de $(1-x)^{1-p}$ est

$$\alpha_n = \frac{p(p+1)\dots(p+n-k)}{1.2.3\dots n},$$

et l'on a

$$\lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = \lim_{n=\infty}\frac{p(1+p)(2+p)\dots(n-1+p)}{n!\,n^{p-1}} = \frac{1}{\Gamma(p)};$$

puis, en vertu d'un théorème connu (*),

$$\lim_{n=\infty}(a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + a_2\alpha_{n-2} + \cdots + a_n\alpha_0)$$
$$= \Gamma(p)\Gamma(1-p)\lim_{n=\infty} n^p a_n \cdot \lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = k\Gamma(1-p).$$

Donc, si l'on observe que

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \cdots + a_n\alpha_0,$$

on peut écrire

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = k\Gamma(1-p).$$

QUESTIONS DE MÉCANIQUE;

par M. Meuric, docteur en sciences physiques et mathématiques.

(*Suite*; voir *Mathesis*, p. 222).

5. Les théorèmes des n^os 2 et 3 peuvent être généralisés ainsi :

Soient M_1 *et* M'_1, M_2 *et* M'_2, ..., M_n *et* M'_n *des couples de points isotomiques pris respectivement sur les côtés* A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 *d'un polygone plan ou gauche* $A_1A_2 \dots A_nA_1$, *et soient* X_1, X_2, ... X_n *les milieux des droites* M'_1M_2, M'_2M_3, ..., M'_nM_1. *On peut construire un polygone de n*

(*) *Bulletin de Darboux*, 1890, p. 117.

côtés dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites A_2X_1, A_3X_2, ..., A_1X_n.

En particulier, si les couples $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, ... coïncident avec les couples A_2A_1, A_3A_2, ..., on arrive au théorème suivant :

Les droites qui joignent chaque sommet d'un polygone plan ou gauche au milieu de la diagonale passant par les secondes extrémités des deux côtés issus du sommet considéré sont, en grandeur et en direction, les côtés d'un nouveau polygone.

6. Si l'on applique le théorème des moments, on arrive à cette proposition :

On joint un point O *de l'espace aux sommets* A_1, A_2, ..., A_n *du polygone et aux points* X_1, X_2, ..., X_n *et on projette tous ces points sur un même plan; soient* o, a_1, a_2, ..., a_n, x_1, x_2, ..., x_n *les projections : la somme algébrique des aires des triangles* ox_1a_2, ox_2a_3, ..., ox_na_1 *est nulle.*

Si le polygone A_1A_2, ..., A_n est plan et que le point O se trouve dans son plan, la somme des aires des triangles OX_1A_2, OX_2A_3, ..., OX_nA_1 est nulle.

SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE.

L'équation différentielle des projections horizontales de ces lignes est

$$mxyp^2 + (x^2 - my^2 - n)\,p - xy = o, \qquad (1)$$

où

$$p = \frac{dy}{dz}, \quad m = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad n = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Comme les auteurs que j'ai pu consulter négligent ou interprètent mal la solution singulière de l'équation (1), la présente note présente un certain intérêt.

1. Si l'on multiplie l'équation (1) par $4xy$ et qu'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $\frac{dY}{dX} = P$, on trouve

$$mXP^2 + (X - mY - n)\,P - Y = o,$$

ou

$$Y = PX - \frac{nP}{mP + 1},$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut. L'intégrale générale est

$$Y = CX - \frac{nC}{mC+1}, \quad \text{ou} \quad y^2 = Cx^2 - \frac{nC}{mC+1}; \tag{2}$$

l'intégrale singulière, enveloppe des courbes (2), a pour équation

$$x \pm y\sqrt{-m} = \pm\sqrt{n}. \tag{3}$$

2. Pour intégrer l'équation (1) par la méthode de Monge, on la dérive par rapport à x après l'avoir divisée par p; le résultat, après quelques transformations, peut être écrit ainsi

$$(mp^2+1)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}\right) = 0;$$

On en déduit la double solution

$$mp^2 + 1 = 0, \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p} = 0;$$

ou

$$p = \pm\sqrt{-\frac{1}{m}}, \quad Cx = py.$$

Si l'on élimine p entre chacune de ces équations et l'égalité (1), on retrouve la solution singulière (3) et la solution générale (3) de l'équation différentielle (1).

3. Pour chaque système de valeurs de x et y, l'équation (1) donne deux valeurs de p dont le produit a la valeur constante $-\frac{1}{m}$.

Par conséquent, *les projections horizontales des deux systèmes de lignes de courbure forment deux systèmes de courbes tels que les coefficients angulaires des tangentes menées en tout point du plan xy aux deux lignes qui passent par ce point ont un produit constant.*

Par une transformation affine ce produit peut devenir égal à -1, c'est-à-dire les deux systèmes de courbes représentées par (1) deviennent orthogonaux. En effet, si l'on remplace y par $\frac{y}{\sqrt{m}}$, ce qui change p en $\frac{p}{\sqrt{m}}$, l'équation (1) se transforme en

$$xyp^2 + (x^2 - y^2 - \lambda^2)p - xy = 0, \tag{4}$$

λ^2 étant écrit pour n. On obtient ainsi l'équation différentielle des coniques homofocales.

Nous reproduisons ici, avec quelques modifications, l'élégante méthode d'intégration due à M. Pomey (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1888, p. 194); il serait facile de l'appliquer à l'équation (1).

L'équation (4) peut prendre la forme

$$xydy^2 + (x^2 - y^2)\,dxdy - xydx^2 = \lambda^2 dxdy,$$

ou

$$(xdx + ydy)(xdy - ydx) = \lambda^2 dxdy,$$

ou encore

$$\frac{xdx + ydy}{\lambda dx} = \frac{\lambda dy}{xdy - ydx}. \tag{5}$$

Une première transformation de la proportion (5) donne

$$\frac{(x+\lambda)\,dx + ydy}{(x-\lambda)\,dx + xdy} = \frac{(x+\lambda)\,dy - ydx}{-(x-\lambda)\,dx + ydx};$$

de cette nouvelle proportion, on déduit en faisant la somme des carrés des antécédents et celle des carrés des conséquents

$$\frac{(x+\lambda)\,dx + ydy}{(x-\lambda)\,dx + ydy} = \pm\frac{\sqrt{[(x+\lambda)^2 + y^2]\,(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{[(x-\lambda)^2 + y^2]\,(dx^2 + dy^2)}}. \tag{6}$$

De là, la double solution

$$dx^2 + dy^2 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{(x+\lambda)\,dx + ydy}{\sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2}} \mp \frac{(x-\lambda)\,dx + ydy}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2}} = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) s'intègre immédiatement; on trouve

$$\sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2} = 2x. \tag{10}$$

L'équation (7) donne $p = \pm\sqrt{-1}$ et, par substitution dans l'égalité (4),

$$x \pm y\sqrt{-m} = \pm\lambda. \tag{11}$$

L'intégrale générale (10) représente une série de coniques homofocales; la solution singulière (11) représente les droites isotropes menées par les foyers. On sait que les coniques homofocales admettent ces droites pour tangentes communes.

La transformation affine change les coniques homofocales en d'autres ayant également quatre tangentes communes. (J. Neuberg.)

*NOTES MATHÉMATIQUES.

24. *Application de la formule du prismatoïde.* Soient a et b deux arêtes opposées d'un tétraèdre, α leur angle et h leur plus courte distance. On peut considérer le tétraèdre comme étant un prismatoïde dont les bases sont formées par les arêtes a et b; la section médiane est un parallélogramme de côtés $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$ et d'angle α. On a donc pour le volume du tétraèdre

$$V = \frac{1}{6}\, abh \sin \alpha.$$

On en déduit immédiatement une démonstration de ce beau théorème de Steiner :

Soient deux droites P *et* Q ; *un segment de longueur donnée a se meut sur* P *et un segment de longueur b se meut sur* Q. *Le tétraèdre ayant les extrémités des deux segments comme sommets conserve le même volume, quelle que soit la position des segments mobiles.* (Droz Farny.)

Autrement. Le volume du tétraèdre dont il est parlé plus haut est le sixième du volume du parallélépipède qui a pour ses trois arêtes a, b et la droite qui joint une extrémité de a à une extrémité de b. Or ce parallélépipède a pour mesure $abh \sin \alpha$. Donc, etc. (Communiqué par M. J. M.).

25. *Sur la trisection de l'angle.* 1° Considérons un triangle ABC rectangle en B, et sur le prolongement du côté AB, portons une longueur égale au double de AB. Par un point quelconque M du côté BC, menons la droite MA et la tangente MT au cercle construit sur BD comme diamètre. L'angle AMB sera le tiers de l'angle AMT. D'après cette remarque, on peut facilement réaliser un instrument composé d'une équerre évidée (dont AB soit un côté extérieur, BC un côté intérieur) et d'un demi-cercle solide, qui permette de diviser assez aisément un angle TMA en trois parties égales.

2° Faisons passer une circonférence de centre C par les sommets B, D des angles obtus B, D, d'un losange ABCD. Les côtés AB, AD du losange rencontrent la circonférence une seconde fois en E et F. L'angle ECF est le triple de l'angle A. Une parallèle à EF menée par C coupe AE en G, AF en H et l'on a AB = BG, AD = DH.

De là résulte un moyen de construire, par tâtonnement, l'angle BAD, tiers de l'angle au sommet ECF d'un triangle isoscèle, au moyen d'une

règle sur laquelle sont marquées deux longueurs AB, BG égales entre elles et à CE. On tâche de placer cette règle de manière que le point A se trouve sur la hauteur du triangle ECF, le point G, sur la parallèle à EF, menée par le sommet C, puis on tire les lignes AE, AF. On peut varier cette construction de diverses manières (Extrait d'un article de M. A. Pegrassi, professeur à Trente).

26. *Une nouvelle quadrature du cercle.* M. Alphonse-Louis Poirier, commis aux Forges et Chantiers du Havre, vient de publier une brochure intitulée : *La solution vraie cherchée sans succès depuis* 2000 *ans ! donnée à la quadrature du cercle, c'est-à-dire le moyen de trouver au cercle son carré équivalent.* Cette solution peut se résumer ainsi: Le côté du carré est *sensiblement* égal à la corde qui sous-tend un arc de 124°48'20",8 ou de $124° \frac{4}{5}$ ou égal aux $\frac{26}{72}$ de toute la circonférence; un tel arc se détermine au moyen du simple rapporteur d'angles qui accompagne les boites de mathématiques, ou mieux au moyen du *rapporteur de précision*, avec alidade à vernier, qui donne les degrés et les minutes et même les 30 secondes par le vernier.

L'auteur démontre sa solution en résolvant, au moyen des tables de Callet, l'équation $2 \sin x = \sqrt{\pi}$, où $2x$ est l'arc qui sous-tend une corde égale au côté du carré équivalent au cercle.

On voit que M. Poirier est un *quadrateur raisonnable*; le titre de sa brochure pourrait faire croire le contraire. (J. N.)

27. *Encore un quadrateur.* A-t-on jamais mentionné, dans l'histoire de la quadrature du cercle, l'ouvrage suivant : *Les quatre tables de la constitution numérale, formant les bases de l'enseignement universel de la numération et du calcul, sans lacunes et avec précision, par* J. B. J. Dessoye, *auteur de la découverte de la comptabilité universelle, de l'unité monétaire indiscutable, dès lors de la précision numérique et des preuves directes des quatre règles fondamentales de l'arithmétique;* Paris, librairie centrale des Sciences, rue de Seine, 13, 1870 (12 pages in-4°)? A la page 10, l'auteur donne la valeur **3,14164** au rapport de la circonférence au diamètre.

Dans l'ouvrage du même auteur, *l'Absolu dans un principe et une révolution dans un seul chiffre, ou Magie numérale et mystères de la contradiction, découverte de la Comptabilité universelle, par* J. B. J. Dessoye, *membre de l'Académie nationale, auteur des* Études sur les propriétés et

l'emploi de l'acier, Paris, E. Lacroix, quai Malaquais, 15, 1863 (88 pages in-8°), on lit :

Page 5 : « Qu'est-ce que la COMPTABILITÉ UNIVERSELLE? C'est une manière spéciale de calculer, non-seulement tout ce que l'*on connaît à cette heure*, mais encore tout ce que l'*on ne connaît pas*, tout ce qui est *douteux* dans l'esprit des hommes, tout ce *qui est naturel* et tout ce *qui paraît surnaturel.* »

Page 48 : « Et de même que la vie est pour chaque être *le grand cercle* qui renferme tous ses calculs, son existence est le parallélogramme dans lequel il y a pour lui une multitude de carrés au milieu desquels il est constamment en LUTTE et à l'ÉTAT DE RENCONTRE et de PUISSANCE CROISÉE, à cause des rapports qu'il a nécessairement avec les choses et avec ses semblables, proportionnellement à ses besoins, à son activité et à ses entreprises. Ainsi, voilà qui doit être bien compris. Il faut en tout rapporter les progressions et les proportions des calculs au CERCLE, au DIAMÈTRE, à la CIRCONFÉRENCE en fonctions du temps, et aux RAYONS de la QUADRATURE, suivant laquelle un carré est la mesure de la circonférence d'une ellipse déterminée POUR TOUS et POUR CHACUN, en présence d'un AXE CENTRAL qui est DIEU, représenté par *l'unité de temps qui est la seconde :* 1″ ».

Page 62 :... « de telle façon que 94 — 18 = 76, soit exactement, en millimètres, la pression sous laquelle l'air pèse 1 gramme 299 milligr. par décimètre cube (Bouillet, *Dictionnaire des Sciences, des Lettres et des Arts*, article *air*). Le poids de l'air est dit par litre : 1 gramme 2935. Donc, si l'on écrit : 1,2935 et 1 pour le litre, on a 2936, soit, par réduction, 299 (*l'auteur additionne* 3 *et* 6), et, dès lors, rigoureusement, 1 gr. 299 mill^s ». Comme le dit l'auteur, c'est une manière spéciale de calculer. (E. GELIN.)

28. *Sur l'utilité de la géométrie non euclidienne.* M. H. Poincaré, dans sa *Notice sur ses Travaux scientifiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1886) raconte qu'il a triomphé *aisément* d'une difficulté rencontrée par lui dans la théorie des fonctions fuchsiennes, grâce à la géométrie lobatchefskienne. Sans l'aide de celle-ci, dit-il, cette difficulté *l'aurait peut-être arrêté longtemps*. Cela prouve que la géométrie non-euclidienne ne présente pas seulement un intérêt spéculatif, mais qu'elle peut rendre des services même dans les parties les plus élevées de l'analyse. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 802.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 31.)

Les normales en deux points, P,P' *d'une conique coupent en* C,C' *l'axe focal. Soit* F *un foyer; les rayons vecteurs* PF, P'F *sont rencontrés, respectivement en* D, D' *par les parallèles à la corde* PP' *menées par* C', C. *Démontrer géométriquement que* FD = FD' *et que la droite* DD' *passe par le point d'intersection des normales* PC, P'C'. *Déduire de ce qui précède une construction du centre de courbure relatif au point* P. (Droz).

Solution par M. Sollertinsky. 1° Soit J le point à l'infini de la droite PP'; N l'intersection des normales PC, P'C'; F', J' les intersections des droites NF, NJ avec PP', CC'. On a

$$N(PP'F'J) = (CC'FJ') = (C'CJ'F)$$

d'où

$$F(PP'F'J) = J(C'CJ'F)$$

ce qui montre que les points D, D', N sont sur une même droite.

2° Soit Q l'intersection de PP' avec l'axe focal. On aura, à cause des parallèles,

$$\frac{FD}{FP} = \frac{FC'}{FQ}, \quad \frac{FD'}{FP'} = \frac{FC}{FQ};$$

or on sait que l'excentricité

$$e = \frac{FC}{FP} = \frac{FC'}{FP'}.$$

Donc

$$FD = \frac{FP.FC'}{FQ} = \frac{FP'.FC}{FQ} = FD'.$$

3° A la limite, lorsque P' vient coïncider avec P, C'D devient la perpendiculaire en C sur CP, DD' devient la perpendiculaire en D sur DP, et on retrouve ainsi une construction bien connue(**) du centre de courbure.

Note. Pour démontrer que les droites PC, PC', DD' concourent en un

---

(*) Nous avons reçu trop tard pour en faire mention dans le dernier numéro, une bonne solution de la question 842, par M. Vladimirescu.

(**) Voir par exemple, *Ch. Taylor*, An introduction etc. p. 222, ex. 601.

même point, M. Servais s'appuye sur le théorème suivant, cas particulier du théorème de Brianchon ;

Etant données trois droites concourantes a, b, c et trois autres droites concourantes a', b', c', les droites qui joignent les couples de points (ab', a'b), (bc', b'c), (ca', c'a) concourent en un même point.

Pour *a*, *b*, *c* il prend les parallèles CD', C'D, PP', et pour *a'*, *b'*, *c'* les droites FP, FP', CC'. Les autres parties de la question sont démontrées comme ci-dessus.

M. Déprez a également résolu la question 802, en démontrant le 1° par la théorie des transversales, les n^os 2 et 3 comme M. Sollertinsky.

×Question 808.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

M *étant un point quelconque du plan d'un triangle* ABC, *soient* H_a, H_b, H_c *les orthocentres des triangles* MBC, MCA, MAB. *Si les droites* AH_a, BH_b, CH_c *sont concourantes*, M *est sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Quel est le lieu du point de concours des droites* AH_a, BH_b, CH_c.

(Lemoine).

Solution par M. Sollertinsky. L'orthocentre H de ABC et les points H_a, H_b, H_c appartiennent à l'hyperbole équilatère MABC.

Mais, à cause des parallèles, on a

$$H(MABC) = M(HH_aH_bH_c). \qquad (1)$$

Donc, si les droites AH_a, BH_b, CH_c concourent au même point O, la droite HM passe aussi par ce point.

La droite à l'infini, sur laquelle concourent les rayons homologues des faisceaux (1), étant la polaire de O par rapport à l'hyperbole équilatère MABC, ce point est le centre de la courbe, et HO = OM.

Ainsi, le lieu de O est le cercle des neuf points de ABC et, par suite, le lieu de M est le cercle circonscrit à ABC.

Note. M. Droz-Farny a donné une solution peu différente de la précédente. Après avoir observé que les points A, B, C, M, H, H_a, H_b, H_c, sont sur une même hyperbole équilatère, il conclut que les points A et H_a, B et H_a, C et H_b, situés par hypothèse sur trois droites concourantes,

déterminent une involution; les droites MA et MH_a, MB et MH_b, MC et MH_c se correspondent donc dans un faisceau involutif, et, par suite, les points d'intersection de MH_a, MH_c, MH_b avec les côtés correspondants du triangle (ou les projections de M sur les côtés) sont en ligne droite, et M est sur la circonférence ABC. Soient A', B', C' les milieux de BC, CA, AB, et ω le centre du cercle ABC; comme $AH = 2\omega A' = MH_a$, la droite AH_a passe par le milieu O de HM, et il en est de même de BH_b, CH_c. Le point O parcourt évidemment la circonférence des neuf points du triangle ABC, etc.

Solution analytique par M. J. Déprez (professeur à l'athénée de Tournay). Soient x', y', z' les coordonnées normales de M. Les droites CH_a, BH_a, respectivement perpendiculaires à MB et MC, ont pour équation

$$\frac{x}{y} = \frac{x'\cos B + z'}{x'\cos A - z'\cos C}, \quad \frac{z}{x} = \frac{x'\cos A - y'\cos B}{x'\cos C + y'};$$

d'où, par multiplication, l'équation de AH_a :

$$z(x'\cos C + y')(x'\cos A - z'\cos C) = y(x'\cos B + z')(x'\cos A - y'\cos B).$$

De même les équations de BH_b, CH_c sont

$$x(y'\cos A + z')(y'\cos B - x'\cos A) = z(y'\cos C + x')(y'\cos B - z'\cos C),$$
$$y(z'\cos B + x')(z'\cos C - y'\cos B) = x(z'\cos A + y')(z'\cos C - x'\cos A).$$

Pour que les droites AH_a, BH_b, CH_c soient concourantes, on doit avoir

$$(x'\cos C + y')(y'\cos A + z')(z'\cos B + x') + (x'\cos B + z')(y'\cos C + x')(z'\cos C + y') = 0,$$

ou

$$2x'y'z'(1 + \cos A\cos B\cos C) + \Sigma x'(y'^2 + z'^2)\sin B\sin C = 0.$$

Si l'on remplace $1 + \cos A\cos B\cos C$ par $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$, l'équation précédente peut prendre la forme

$$(x'\sin A + y'\sin B + z'\sin C)(y'z'\sin A + z'x'\sin B + x'y'\sin C) = 0,$$

On en conclut que le lieu du point M a pour équation

$$y'z'\sin A + z'x'\sin B + x'y'\sin C = 0; \qquad (1)$$

c'est donc la circonférence circonscrite au triangle ABC.

L'équation de AH_a peut prendre la forme

$$z\,[x'^2\cos A\cos C + x'y'\cos A - x'z'\cos^2 C - y'z'\cos C]$$
$$= y\,[x'^2\cos A\cos B - x'y'\cos^2 B + x'z'\cos A - y'z'\cos B]$$

Remplaçons le produit $y'z'$ par sa valeur $-\dfrac{x'(y'\sin C + z'\sin B)}{\sin A}$ tirée de (1) ; il vient

$$z\,[x'\cos A\cos C\sin A + y'\sin B\cos(A-C) + z'\cos C\sin C\cos A]$$
$$= y\,[x'\cos A\sin A\cos B + y'\cos B\sin B\cos A + z'\sin C\cos(A-B)],$$

ou

$$z\,(\cos A\cos C\Sigma x'\sin A + y'\sin B\sin A\sin C)$$
$$= y\,(\cos A\cos B\Sigma x'\sin A + z'\sin A\sin B).$$

On en conclut, en observant que $\Sigma x'\sin A = 2R\sin A\sin B\sin C$,

$$\frac{y}{y' + 2R\cos A\cos C} = \frac{z}{z' + 2R\cos B\cos A} = \frac{x}{x' + 2R\cos B\cos C}, \quad (2)$$

x, y, z désignant maintenant les coordonnées du point de concours M' des droites AH_a, BH_b, CH_c. Les trois rapports (2) ont pour valeur commune

$$\frac{\Sigma x\sin A}{\Sigma x'\sin A + 2R\,\Sigma\sin A\cos B\cos C} = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{4R\sin A\sin B\sin C} = \frac{1}{2};$$

par suite,

$$x' + 2R\cos B\cos C = 2x,$$
$$y' + 2R\cos C\cos A = 2y, \quad z' + 2R\cos A\cos B = 2z.$$

Tirons de là x', y', z' pour substituer les valeurs obtenues dans l'équation (1) ; nous aurons

$$\Sigma\frac{\sin A}{x - R\cos B\cos C} = 0.$$

Si l'on égale à zéro les trois dénominateurs, on a les équations des droites qui joignent les milieux des segments AH, BH, CH, deux à deux ; on en déduit que le point M' se meut sur la circonférence des neuf points du triangle ABC, propriété qu'on peut démontrer géométriquement.

Remarques I. M' est un centre de symétrie des deux quadrilatères ABCM, $H_aH_bH_cH$. On en déduit que la droite de Simson de H par rapport au triangle $H_aH_bH_c$ se confond avec celle de M par rapport à ABC.

II. L'axe radical des deux cercles ABC, $H_aH_bH_c$, lorsque M parcourt la circonférence ABC, est perpendiculaire sur HM en M'; puisque M' décrit la circonférence des neuf points de ABC, l'axe radical a pour enveloppe une ellipse ayant pour foyers H et le centre du cercle ABC, et inscrite au triangle ABC.

III. Si l'on substitue au triangle ABC de la question 808 un triangle sphérique, le point M doit être tel que ses projections sur les côtés du triangle soient sur un même arc du grand cercle.

IV. On peut généraliser la proposition 808 en faisant une projection cylindrique de la figure. Les points H_a, H_b, H_c, seront remplacés par les anticomplémentaires d'un point fixe O par rapport aux triangles MBC, MAB, etc.

Question 821.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 79.)

Discuter la fonction

$$y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}, \tag{1}$$

x variant d'une manière continue de $-\infty$ *à* $+\infty$.

Solution par M. P. Decamps. En développant $\operatorname{tg} 3x$ on a

$$y = \frac{(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^2 x}{3 - \operatorname{tg}^2 x}. \tag{2}$$

D'après cette valeur (2) de y, on voit que :

pour $x = 0$, $y = 0$;

pour $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = 30°$, $y = 0$;

pour $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ ou $x = 60°$, $y = \infty$;

pour $\operatorname{tg} x = \infty$ ou $x = 90°$, $y = \infty$.

Lorsque x varie de 0° à 30°, y est positif, et comme la valeur initiale et la valeur finale de y sont nulles, y passe par un maximum dans l'intervalle considéré.

Lorsque x varie de 30° à 60°, y est négatif; les valeurs extrêmes de y étant 0 et $-\infty$, il n'y a ni maximum ni minimum de y entre $x = 30°$ et $x = 60°$.

x variant de 60° à 90°, y est positif; les valeurs extrêmes de y étant infinies, y passe par un minimum.

De ce qui précède, on conclut facilement les variations de y dans les intervalles (90°, 180°), (180°, 170°), etc.

L'équation (2) étant résolue par rapport à tg x, on trouve

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{y^2 - 34y + 1}}{6};$$

par suite, un maximum de y est $17 - 12\sqrt{2}$; un minimum, $17 + 12\sqrt{2}$. Les valeurs correspondantes de $\operatorname{tg}^2 x$ sont $3 \mp 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \mp 1)^2$. Si l'on se rapporte à la discussion faite ci-dessus, on voit qu'entre $x = 0$ et $x = 30°$, pour $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$, y passe par un maximum $17 - 12\sqrt{2}$; entre $x = 60°$ et $x = 90°$, pour $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} + 1$, y passe par un minimum $17 + 12\sqrt{2}$.

De même, entre $x = 90°$ et $x = 120°$, pour $\operatorname{tg} x = -(\sqrt{2} + 1)$, y passe par un minimum $17 + 12\sqrt{2}$, etc.

Prenons sur un axe Ox les longueurs $OA = \frac{1}{6}\pi$, $OB = \frac{1}{3}\pi$, $OC = \frac{1}{2}\pi$ et menons les ordonnées correspondantes AA', BB', CC' dans le sens des y positifs, les ordonnées AA'', BB'', CC'' dans le sens des y négatifs. La courbe (1) présente une première partie ODA, avec une ordonnée maximum pour $x = \text{arc tg}(\sqrt{2} - 1)$; elle se continue ensuite du côté des y négatifs en approchant asymptotiquement de BB''. Une seconde partie est comprise entre BB', CC'; elle a pour asymptotes BB', CC' et offre une ordonnée minimum pour $x = \text{arc tg}(\sqrt{2} + 1)$. Si l'on prend la figure symétrique de la précédente par rapport à C'C'', on a la courbe dans l'intervalle $\frac{1}{2}\pi$, etc.

Note. M. Morel figure les variations de y au moyen de la courbe

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}^3 \omega}{\operatorname{tg} 3\omega}. \qquad (3)$$

Soient Ox l'axe polaire, Oy une perpendiculaire à Ox, Ou et Ov les droites qui divisent l'angle xOy en trois parties égales. La courbe (3) présente d'abord une foliole située dans l'angle xOu et touchant en O les droites Ox, Oy; dans l'angle uOv, elle offre une partie infinie touchant Ou en O et asymptotique à Ov(*); enfin, dans l'angle vOy, elle comprend

(*) Cette partie correspond aux valeurs de ω comprises entre 210° et 240°, la

une ligne asymptotique de Ov, Oy. Si l'on dessine la figure symétrique des deux précédentes par rapport à Oy, puis les symétriques des deux précédentes par rapport à O, on aura dessiné complètement la courbe (3).

Cette question 821, est ancienne. Voir N. A. M., 1850, IX, p. 41, aux questions d'examens de l'École Polytechnique en 1849, n° 106.

×Question 855.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 175.)

Si un nombre premier p n'est pas la somme de deux carrés, p^2 est la somme de trois carrés(*). (E. CATALAN.)

1° Supposons $p = a^2 + b^2 + c^2$. On a, identiquement,

$$p^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2.$$

On ne peut avoir, ni $c = 0$, ni $c^2 = a^2 + b^2$; car, dans le premier cas, p serait la somme de deux carrés; et, dans le second, ce nombre *impair* serait égal à $2(a^2 + b^2)$.

2° Soit, maintenant, $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; puis

$$p^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Le dernier terme est réductible à $(2f)^2 + (2g)^2$, si l'on fait

$$f = ac \pm bd, \quad g = ad \mp bc \text{ (**)}.$$

On ne peut supposer $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$; car p serait *pair*.

Si $ac = bd$, on a

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \pm 2ac \mp 2bd, \text{ ou}$$
$$p = (a \pm c)^2 + (b \mp d)^2;$$

contre l'hypothèse. De même si $ad = bc$.

REMARQUES. I. Le nombre p a la forme $4n - 1$; attendu que : *tout nombre premier, de la forme $4n + 1$, est la somme de deux carrés* (Fermat).

II. D'après le théorème de Bachet (ou de Fermat), il est inutile de supposer p égal à une somme de *cinq* carrés, de *six* carrés, etc.

---

courbe symétrique de cette partie par rapport à 0 correspond à ω variant entre 30° et 60°.

(*) Dans les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (1873), j'ai conclu ce théorème, de la considération des *séries elliptiques*. Il restait à le démontrer, d'une manière élémentaire.

(**) Théorème de Fibonacci.

III. Un nombre premier, de la forme $4n-1$, peut être, à la fois, la somme de *trois* carrés et la somme de *quatre* carrés.

Exemple. Soit $p=19$. On a $19=9+9+1=16+1+1+1$.

Dans ce même cas, p^2, somme de *trois* carrés, peut être la somme de *quatre* carrés.

Exemple. Soit encore $p=19$. On a $p^2=361=17^2+6^2+6^2=16^2+10^2+2^2+1^2$ (*).

(Octobre 1893). E. CATALAN.

Question 856.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 175).

Soient M, M′ *deux points infiniment voisins, pris sur une courbe* U; *soit* T *le point d'intersection des tangentes menées en ces points. Si au point* M, *les dérivées* y'', y''',..., $y^{(n)}$ *sont nulles, le rapport* MT : M′T *a pour limite* n.

Solution par M. E. CESARO. Prenons comme axes la tangente et la normale en M. Soient Q le point de rencontre de la tangente en M′ avec l'axe des y, et Q′ la projection de M′ sur l'axe des x. On a

$$\lim\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}}=\lim\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{TQ'}}\cdot\lim\frac{\mathrm{TQ'}}{\mathrm{M'T}}=\lim\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{TQ'}}=\lim\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{M'Q'}}=\lim\frac{xy'-y}{y}.$$

Cela étant, si l'on applique la règle de l'Hospital, en supposant que $y^{(n+1)}$ soit la première dérivée non nulle en M, et que $y^{(n+2)}$ reste finie en ce point, on obtient successivement

$$\lim\frac{xy'}{y}=1+\lim\frac{xy''}{y'}=2+\lim\frac{xy'''}{y''}=3+\lim\frac{xy^{\mathrm{IV}}}{y'''}=\ldots\ldots$$

Donc

$$\lim\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}}=n+\lim\frac{xy^{(n+2)}}{y^{(n+1)}}=n.$$

(*) Dans la démonstration précédente, rien n'exprime que p est un nombre *premier*. Donc :

Si un nombre impair N, *non carré, n'est pas la somme de deux carrés,* N^2 *est la somme de trois carrés;* puis, évidemment : *chacun des nombres* N^4, N^8, N^{16}, ... *est la somme de trois carrés.*

Autre solution par M. ABSOLONNE.

M. de Longchamps a signalé la proposition qui forme l'objet de la question 856, au congrès de Besançon (août 1893); nous l'avions trouvée de notre côté, mais nous la supposions déjà connue. Il n'est peut-être pas inutile de faire observer à nos jeunes lecteurs que la démonstration précédente suppose que y'', y''',... $y^{(n)}$ restent nulles quand on soumet x et y à une transformation linéaire, ce qui est exact. (J. N.)

Question 858.

(Voir *Mathesis*, (2, III, p. 175).

Le lieu des points tels qu'en abaissant les quatre normales à une ellipse, la somme des carrés des six distances mutuelles des pieds des normales soit constante est une conique. Dans quel cas ce lieu se compose-t-il de lignes droites ? (E. N. BARISIEN.)

Solution par MM. DROZ-FARNY, ABSOLONNE, COLLETTE *et* MANDART. L'équation de l'ellipse étant $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, celle de l'hyperbole d'Apollonius du point P (α, β) est

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Éliminant x entre ces deux égalités, on obtiendra l'équation aux ordonnées des pieds des normales :

$$c^4y^4 + 2c^2b^2\beta y^3 + y^2[b^2a^2\alpha^2 + b^4\beta^2 - b^2c^4] + \cdots - b^6\beta^2 = 0.$$

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 les racines; on aura :

$$\Sigma y_i = \frac{-2b^2\beta}{c^2}, \quad \Sigma y_iy_2 = \frac{b^2a^2\alpha^2 + b^4\beta^2 - b^2c^4}{c^4}, \tag{1}$$

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma^2 y_i - 2\Sigma y_iy_2 = \frac{2b^2(b^2\beta^2 - a^2\alpha^2 + c^4)}{c^4}. \tag{2}$$

De même,

$$\Sigma x_ix_2 = \frac{a^2b^2\beta^2 + a^4\alpha^2 - a^2c^4}{c^4}, \quad \Sigma x_i^2 = \frac{2a^2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^4)}{c^4}; \tag{3}$$

Posons

$$\Sigma[(x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2] = m^2$$

ou

$$3\Sigma x_i^2 + 3\Sigma y_i^2 - 2\Sigma x_ix_2 - 2\Sigma y_iy_2 = m^2;$$

en tenant compte des égalités (1), (2), (3,) nous aurons

$$4b^2(2a^2 - b^2)\beta^2 + 4a^2(2b^2 - a^2)\alpha^2 = c^4(8a^2 + 8b^2 - m^2).$$

Le lieu proposé est donc une ellipse, une hyperbole ou un système de deux droites perpendiculaires au grand axe de l'ellipse donnée suivant que $b > c$, $< c$ ou $= c$. L'hyperbole se réduit à deux droites si $m^2 = 8(a^2 + b^2)$.

Question CCCXXXIX.

(Voir N. C. M., n° 339 et LAISANT, IV, n° 889, p. 228.)

A, B *étant deux points d'une ellipse;* P *le point de concours des normales en ces points;* C, D *les pieds des deux autres normales qu'on peut mener par le point* P: 1° *Trouver le lieu que décrit le centre de l'hyperbole équilatère passant par les quatre points* A, B, C, D *quand la sécante* AB *se déplace parallèlement à elle-même;* 2° *Prouver que le point* D', *diamétralement opposé à* D, *se trouve avec* A, B, C *sur une même circonférence, et trouver le lieu du centre de cette circonférence, quand la droite* AB *se déplace comme dans le premier cas.* (CONCOURS ACADÉMIQUE de Lille, 1874.)

Solution par M. BARISIEN. Soient X, Y les coordonnées de P; l'hyperbole équilatère passant par les pieds A, B, C, D des normales issues de P a pour équation

$$c^2xy + b^2x\mathrm{Y} - a^2y\mathrm{X} = 0. \tag{1}$$

Représentons par

$$y - mx - p = 0, \quad y - m'x - p' = 0, \tag{2}$$

les cordes AB, CD. L'équation

$$\lambda(c^2xy + b^2x\mathrm{Y} - a^2y\mathrm{X}) + (y - mx - p)(y - m'x - p') = 0 \tag{3}$$

est celle de l'ellipse donnée, pourvu qu'on choisisse convenablement λ. On trouve facilement les égalités de condition

$$a^2mm' = b^2, \tag{4}$$

$$pp' = -b^2, \tag{5}$$

$$m + m' = \lambda c^2, \tag{6}$$

$$pm' + mp' = -\lambda b^2\mathrm{Y}, \tag{7}$$

$$p + p' = -\lambda a^2\mathrm{X}. \tag{8}$$

1° Par hypothèse, m est constant; la relation (4) montre qu'il en est de même de m'.

Les coordonnées du centre de l'hyperbole (1) étant

$$x = \frac{a^2}{c^2}\mathrm{X}, \quad y = -\frac{b^2}{c^2}\mathrm{Y}, \tag{9}$$

le lieu de ce point est lié très simplement à celui du point P. Or les équations (7) et (8) donnent

$$p = -\lambda \frac{a^2 m X - b^2 Y}{m - m'}, \quad p' = \lambda \frac{a^2 m' X - b^2 Y}{m - m'};$$

substituant ces valeurs dans l'égalité (5) et éliminant λ au moyen de (6), on trouve

$$(a^2 m X - b^2 Y)(a^2 m' X - b^2 Y) = b^2 c^4 \frac{(m - m')^2}{(m + m')^2},$$

ou, à cause de (4);

$$(X - m' Y)(X - m Y) = \frac{c^4}{a^2} \frac{(m - m')^2}{(m + m')^2}.$$

Telle est donc l'équation du lieu de P; elle représente une hyperbole concentrique à l'ellipse donnée et dont les asymptotes ont des directions symétriques de celles de AB et CD par rapport à la bissectrice de l'angle des axes de l'ellipse.

2° De l'équation (4), on déduit $mm' = \frac{b^2}{a^2}$; comme les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires vérifient la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$, on voit que la corde supplémentaire CD′ de CD et la corde AB sont également inclinées sur l'axe des x, mais en sens contraires. Donc, d'après un théorème connu, les quatre points A, B, C, D′ sont sur une même circonférence.

Soit

$$y = -mx + q$$

l'équation de la corde CD′. Si on la combine avec celle de CD pour trouver les coordonnées de C et qu'on substitue les valeurs obtenues dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$a^2(mp' + m'q)^2 + b^2(q - p')^2 = a^2 b^2 (m + m')^2. \qquad (10)$$

L'équation de la circonférence de cercle ABCD′ est de la forme

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 - \mu (y - mx - p)(y + mx - q) = 0,$$

avec la condition

$$b^2 + \mu m^2 = a^2 - \mu, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{c^2}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du centre sont

$$\alpha = -\frac{\mu m(p+q)}{2(b^2+\mu m^2)} = -\frac{mc^2(p+q)}{2(a^2m^2+b^2)}, \tag{11}$$

$$\beta = \frac{\mu(q-p)}{2(a^2-\mu)} = \frac{c^2(q-p)}{2(a^2m^2+b^2)}. \tag{12}$$

Pour obtenir le lieu de ce point, il suffit d'éliminer p et q entre les égalités (10), (11) et (12), après avoir remplacé dans la première p' par $\frac{b^2}{p}$, m' par $\frac{b^2}{a^2m}$. On trouve

$$(a^2m^2+b^2)^4(\alpha^2-m^2\beta^2)^2 - m^2c^4(a^2m^2+b^2)^3(\alpha+m\beta)^2 + a^2b^2c^6m^6 = 0.$$

La courbe est donc une quartique.

On obtient le lieu des centres des circonférences CDA, CDB en remplaçant m par m' ou $\frac{b^2}{a^2m}$.

Remarques. I. *Le lieu des points de rencontre des cordes* AB, CD *est une hyperbole*, dont l'équation s'obtient en éliminant p et p' entre les égalités (2) et (5).

II. *Le lieu du point de rencontre des perpendiculaires élevées au milieu des droites* AB, CD *est l'hyperbole représentée par*

$$(x+my)(x+m'y) = -\frac{b^2c^4}{a^4(m+m')^2}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

587. a et a_1 étant deux nombres positifs quelconques, trouver la limite des nombres définis par les égalités

$$a_2 = \frac{a+a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}, \quad a_4 = \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots$$

Prenons sur une droite Ox les segments $OA = a$, $OA_1 = a_1$, et soient A_2 le milieu de AA_1, A_3 celui de A_1A_2, A_4 celui de A_2A_3, etc...; nous aurons évidemment $a_2 = OA_2$, $a_3 = OA_3$,.... Cette construction donne, si $a < a_1$ et $a_1 - a = d$,

$$a_n = a + \frac{d}{2} - \frac{d}{4} + \frac{d}{8} - \ldots, \quad \lim a_n = a + \frac{d}{3} = \frac{2a+a_1}{2}.$$

Le point-limite des points A_1, A_2,... divise la droite AA_1 dans le rapport 1 : 2. (D'après Mad. Prime dans le *Periodico di Matematica.*)

588. On donne trois circonférences O, O′, O″ qui se touchent deux à deux aux points A, A′, A″. Une sécante quelconque menée par A rencontre les circonférences O′, O″ en B′, B″. Démontrer que les droites B′A″, B″A′ rencontrent la circonférence O aux extrémités C, D d'un même diamètre (KAHN).

En effet, d'après la théorie des centres de similitude des cercles, les rayons O′B′ et OC, O″B″ et OD, O′B′ et O″B″ sont parallèles.

589. Etant donné un triangle ABC, mener extérieurement au triangle, dans son plan, une parallèle DD′ au côté BC à une distance x telle que si l'on fait tourner le triangle autour de DD′, l'aire décrite par BC soit moyenne proportionnelle entre les aires décrites par AB et CA.

(*Baccalauréat*, PARIS, 1893.)

Si BC passe entre A et DD′, l'équation du problème est

$$2ax = (2x + h)\sqrt{bc};$$

on doit avoir $a > \sqrt{bc}$. Si A est situé entre BC et DD′, on a l'équation

$$2ax = (2x - h)\sqrt{bc};$$

pour que la racine soit plus grande que h, on doit avoir

$$a < \sqrt{bc} \quad \text{et} \quad > \tfrac{1}{2}\sqrt{bc}$$

Lorsque DD′ passe entre A et BC, on trouve

$$2ax = \frac{x^2 + (h - x)^2}{h}\sqrt{bc}.$$

590. Construire la courbe définie par l'équation

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 5}.$$

La courbe coupe Ox en deux points A, B ayant pour abscisses 1 et 2; elle n'a pas d'asymptote parallèle à Oy, les racines de $x^2 - 4x + 5 = 0$ étant imaginaires; elle a une asymptote parallèle à Ox, car pour $x = \pm\infty$ on trouve $\lim y = 1$. Un maximum $y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ correspond à $x = 3 + \sqrt{2}$, un minimum $y = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ correspond à $x = 3 - \sqrt{2}$; le premier se trouve au delà de B, le second entre A et B. La courbe rencontre l'asymptote $y = 1$ en un point ayant pour abscisse $x = 3$; elle coupe Oy au point défini par $y = \frac{2}{5}$. D'après cela il est facile de la tracer.

591. Sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC, on marque les points C′, A′, B′. Trouver la condition nécessaire pour que les parallèles

menées par C, A, B aux droites B'C', C'A', A'B' concourent en un même point.

Réponse :

$$\left(\frac{AB.AB'}{AC.AC'}-1\right)\left(\frac{BC.BC'}{BA.BA'}-1\right)\left(\frac{CA.CA'}{CB.CB'}-1\right)=1.$$

592. Trois marchands se sont associés pour fournir à un régiment, le premier 510 mètres de drap rouge, le second 2000 mètres de drap bleu et le troisième 3900 mètres de toile. La valeur du drap bleu est les $\frac{4}{5}$ de celle du drap rouge, et le prix de la toile est $\frac{1}{8}$ de celui du drap bleu. Que revient-il à chacun des trois négociants, sur un bénéfice total de 3750 fr. ? (*Arts et Métiers de Châlons*, 1892.)

593. Trouver, sans faire usage des tables, les angles d'un triangle dont les côtés sont proportionnels à $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Dans la formule :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

faisons

$$a=2\sqrt{3},\quad b=\sqrt{6}+\sqrt{2},\quad c=2\sqrt{2};$$

nous aurons

$$\cos A=\tfrac{1}{2},\quad \text{d'où}\quad A=60^\circ.$$

On trouve de même

$$\cos C=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{d'où}\quad C=45^\circ.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

587. On considère une ellipse (E) et un cercle (C) concentrique à l'ellipse. D'un point quelconque de (C) on mène les tangentes à (E). Le cercle passant par ce point et les points de contact M, M' des tangentes rencontre (E) en deux autres points N, N'. Montrer que 1° la droite NN' enveloppe une ellipse. 2° Cette droite et la polaire du point se rencontrent sur une kreuzcurve. (E. N. Barisien.)

×**588.** Les traces d'un plan font avec la ligne de terre les angles α et β ; les projections d'une droite font avec la ligne de terre les angles α' et β'. Démontrer que la condition de parallélisme du plan et de la droite est

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta}=1.$$

En déduire les angles que font avec la ligne de terre les projections de

l'intersection de deux plans dont on donne les angles des traces avec la ligne de terre. (A. C.)

×**889.** Une montre a 3 aiguilles égales des heures, minutes, secondes et de même pivot. On demande s'il viendra un moment où les 3 aiguilles auront leurs extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral?

890. On donne une courbe plane Δ. En un point quelconque M de Δ, on mène la tangente MT. O étant un point fixe, on construit l'angle MOT égal à un angle donné α. Trouver par des considérations cinématiques ou infinitésimales la tangente en P à la courbe décrite par ce point lorsque M parcourt Δ. (J. Neuberg).

891. Etant donnés un polygone plan ABC ... KL et des nombres positifs, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$, moindres que l'unité, on déduit, d'un point quelconque L_0 du plan la suite de points A_1, B_1, C_1, ..., K_1, L_1, en prenant sur le droite AL_0 le segment $AA_1 = \alpha . AL_0$, sur la droite BA_1 le segment $BB_1 = \beta . BA_1$, sur la droite CB_1 le segment $CC_1 = \gamma . CB_1$ etc. Le même procédé étant appliqué au point L_1, on obtient une seconde suite A_2, B_2, ..., L_2; le point L_2 conduit à une troisième suite A_3, B_3, ..., L_3, etc.

Démontrer que les points A_n, B_n, ..., L_n tendent vers des positions-limites A', B', ... L'. Etant donnés les nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et l'un des polygones ABC ... L, A'B'C' ... L', comment peut-on trouver l'autre polygone?

Cette proposition généralise la question 3206 du *Journal de Vuibert*. (J. N.)

892. On donne, dans un même plan, une conique C et un cercle O. Soit AB la corde des contacts de la conique C avec un des cercles qui lui sont bitangents. L'axe radical de ce cercle et du cercle O coupe la droite AB en un point M dont on demande le lieu géométrique. Quelle est l'enveloppe de cet axe radical? (V. Jamet).

×**893.** Sur les côtés d'un triangle ABC on construit extérieurement les carrés BCDE, CAFG, ABHJ; sur les droites FJ, HE, DG, on construit extérieurement les carrés FJLM, HENO, DGPQ. Démontrer 1° que les droites QN, OL, MP sont parallèles aux côtés du triangle ABC et égales aux quadruples de ces côtés; 2° que les trapèzes EDQN, HJLO, FGPM sont égaux à cinq fois le triangle ABC. (Niyland).

894. On coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire à un axe et l'on considère la développée de la section. Si le plan se déplace parallèlement à lui-même, la développée engendrera une surface. Trouver *l'équation* de cette surface et le volume qu'elle limite. (Petit-Bois).

CONDITION POUR QUE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ AIENT UNE RACINE COMMUNE;

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

1. Soient les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

En exprimant que l'une des racines de la première est égale à l'une des racines de la seconde, on a

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'},$$

chaque radical étant pris avec le signe convenable. Cette égalité peut être écrite de l'une des trois manières :

$$ab' - ba' = a'\sqrt{b^2 - 4ac} - a\sqrt{b'^2 - 4a'c'},$$

$$ab' - ba' - a'\sqrt{b^2 - 4ac} = -a\sqrt{b'^2 - 4a'c'},$$

$$ab' - ba' + a\sqrt{b'^2 - 4a'c'} = a'\sqrt{b^2 - 4ac};$$

d'où, en élevant au carré et en simplifiant,

$$2ac' + 2ca' - bb' = \sqrt{(b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')},$$

$$b(ab' - ba') - 2a(ac' - ca') = (ab' - ba')\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca') = -(ab' - ba')\sqrt{b'^2 - 4a'c'};$$

puis, en élevant de nouveau au carré et en simplifiant,

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 = (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c'), \qquad (1)$$

$$a(ac' - ca')^2 - b(ab' - ba')(ac' - ca') + c(ab' - ba')^2 = 0, \qquad (2)$$

$$a'(ac' - ca')^2 - b'(ab' - ba')(ac' - ca') + c'(ab' - ba')^2 = 0. \qquad (3)$$

Telle est, écrite sous trois formes différentes, la condition nécessaire pour que les deux équations aient au moins une racine commune.

2. On peut aussi trouver cette condition en éliminant, entre les deux équations données, le premier, le second ou le troisième terme.

1° Si l'on élimine le premier terme, on a

$$x(ab' - ba') + ac' - ca' = 0,$$

d'où, pour la racine commune,

$$x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \qquad (\alpha)$$

En remplaçant x par cette valeur dans la première ou dans la seconde équation, on trouve la condition cherchée sous la forme (2) ou (3).

2° Si l'on élimine le second terme, on a

$$x^2(ab' - ba') + cb' - bc' = 0,$$

d'où, pour la racine commune,

$$x = \sqrt{\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}}. \qquad (\beta)$$

En remplaçant x par cette valeur dans l'une des équations données, écrites sous la forme

$$(ax^2 + c)^2 = b^2x^2, \qquad (a'x^2 + c')^2 = b'^2x^2,$$

on trouve, pour la condition cherchée,

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'). \qquad (4)$$

3° Si l'on élimine le troisième terme, on a

$$x^2(ac' - ca') + x(bc' - cb') = 0,$$

d'où, pour la racine commune (*),

$$x = -\frac{bc' - cb'}{ac' - ca'}. \qquad (\gamma)$$

En remplaçant x par cette valeur dans la première ou dans la seconde équation, on a la condition

$$a(bc' - cb')^2 - b(ac' - ca')(bc' - cb') + c(ac' - ca')^2 = 0, \quad (5)$$

$$a'(bc' - cb')^2 - b'(ac' - ca')(bc' - cb') + c'(ac' - ca')^2 = 0. \quad (6)$$

4° En égalant entre elles les valeurs (α) et (β), (α) et (γ), (β) et (γ) de la racine commune, on retrouve la condition (4).

3. Soient encore x' et x'' les racines de la première équation, x' et x''' les racines de la seconde. On a

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a},$$

$$x' + x''' = -\frac{b'}{a'}, \quad x'x''' = \frac{c'}{a'},$$

(*) Lorsque la racine commune est $x = 0$, on a $c = 0$, $c' = 0$, et réciproquement.

d'où, en éliminant x',

$$x'' - x''' = \frac{ab' - ba'}{aa'}, \quad \frac{x''}{x'''} = \frac{ca'}{ac'}.$$

On tire de là

$$x'' = -\frac{c}{a} \cdot \frac{ab' - ba'}{ac' - ca'}, \quad x''' = -\frac{c'}{a'} \cdot \frac{ab' - ba'}{ac' - ca'};$$

puis on a

$$x' = -\frac{b}{a} - x'' = -\frac{b'}{a'} - x''' = -\frac{bc' - cb'}{ac' - ca'},$$

ou

$$x' = \frac{c}{ax''} = \frac{c'}{a'x'''} = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

En remplaçant x'' ou x' dans la première équation, x''' ou x' dans la seconde, on trouve la condition cherchée sous les formes (2), (3), (5), (6).

En égalant entre elles les deux valeurs de x', on retrouve la condition (4).

4. Il est aisé de vérifier l'équivalence des formules (1), (2), (3), (4), (5), (6).

La formule (1), par exemple,

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 = (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c'),$$

peut s'écrire successivement :

$$4(ac' + ca')^2 - 4bb'(ac' + ca') + b^2b'^2 = b^2b'^2 - 4acb'^2 - 4a'c'b^2 + 16aca'c',$$

$$(ac' - ca')^2 = bb'(ac' + ca') - acb'^2 - a'c'b^2,$$

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la formule (4).

De même, la formule (2),

$$a(ac' - ca')^2 - b(ab' - ba')(ac' - ca') + c(ab' - ba')^2 = 0,$$

donne

$$a(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')[b(ac' - ca') - c(ab' - ba')],$$

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

c'est-à-dire qu'on retrouve encore la formule (4).

5. Il reste à démontrer que la condition trouvée est *suffisante*, c'est-à-dire que, si elle est remplie, les deux équations données admettent une racine commune.

La condition trouvée peut s'écrire, en prenant c' pour inconnue,

$$a^2c'^2 - c'[2aca' + b(ab' - ba')] + c^2a'^2 + cb'(ab' - ba') = 0,$$

d'où

$$c' = \frac{1}{2a^2}\left[2aca' + b(ab' - ba') \pm (ab' - ba')\sqrt{b^2 - 4ac}\right],$$

ou

$$c' = \frac{ca'}{a} - \frac{ab' - ba'}{a}\left(\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

ou

$$-\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On trouverait de même, en cherchant la valeur de c,

$$-\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{-b' \mp \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'}.$$

On a donc

$$\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \mp \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'},$$

c'est-à-dire que l'une au moins des racines de la première équation est égale à l'une des racines de la seconde, ce qu'il fallait démontrer.

6. On peut aussi se proposer de former l'équation aux racines non communes des deux équations données. On a

$$x'' + x''' = -\frac{(ab' - ba')(ac' + ca')}{aa'(ac' - ca')}, \quad x''x''' = \frac{cc'}{aa'}\left(\frac{ab' - ba'}{ac' - ca'}\right)^2,$$

d'où, pour l'équation cherchée,

$$aa'(ac' - ca')^2x^2 + (ab' - ba')(a^2c'^2 - c^2a'^2)x + cc'(ab' - ba')^2 = 0.$$

7. Si les coefficients a, b, c, a', b', c' sont *réels*, la racine commune et les deux racines non communes des deux équations sont aussi *réelles*.

C'est ce qui résulte des valeurs trouvées pour x', x'', x''', et ce que l'on peut d'ailleurs démontrer simplement de la manière suivante :

Si l'on avait l'égalité

$$\frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b' + i\sqrt{4a'c' - b'^2}}{2a'}, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

on en déduirait, comme on le sait,

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{b'}{2a'},\quad \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{\sqrt{4a'c'-b'^2}}{2a'},$$

d'où

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'};$$

c'est-à-dire que les deux équations seraient identiques, ou auraient les deux racines imaginaires communes.

On peut aussi faire voir directement que la condition

$$U=(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')=0$$

est impossible, lorsque les deux équations, sans être identiques, ont des racines imaginaires, c'est-à-dire lorsque les binômes b^2-4ac et $b'^2-4a'c'$ sont négatifs.

Posons, en effet,

$$b^2-4ac=-\alpha^2,\quad b'^2-4a'c'=-\alpha'^2,$$

d'où

$$c=\frac{\alpha^2+b^2}{4a},\quad c'=\frac{\alpha'^2+b'^2}{4a'}.$$

On aura

$$U=\left[a\frac{\alpha'^2+b'^2}{2a'}+a'\frac{\alpha^2+b^2}{2a}-bb'\right]^2-\alpha^2\alpha'^2$$

$$=\frac{[a^2(\alpha'^2+b'^2)+a'^2(\alpha^2+b^2)-2aa'bb']^2-4a^2a'^2\alpha^2\alpha'^2}{4a^2a'^2}$$

$$=\frac{[a\alpha'+\alpha a')^2+(ab'-ba')^2]\,[a\alpha'-\alpha a')^2+(ab'-ba')^2]}{4a^2a'^2}>0.$$

Si les coefficients a, b, c, a', b', c', sont non seulement réels mais *rationnels*, la racine commune et les racines non communes des deux équations sont aussi *rationnelles*, et les expressions

$$b^2-4ac,\quad b'^2-4a'c',\quad \frac{bc'-cb'}{ab'-ba'},\quad (ab'-ba')(bc'-cb'),$$

sont des *carrés*(*).

(*) Par une distraction évidente, la question traitée dans cet article est ains

ALBERT RIBAUCOUR (1845-1893).

Le compte rendu de la séance du 25 septembre 1893 de l'Académie des Sciences de Paris, contient les quelques lignes suivantes : « M. le Secrétaire perpétuel informe l'Académie de la perte que la Science vient de faire dans la personne de M. Albert Ribaucour, ingénieur en chef des ponts et chaussées, lauréat de l'Académie et auteur de travaux mathématiques très remarquables, mort à Philippeville [Algérie], le 13 septembre » (C. R., CXVII, p. 435).

A. Ribaucour a publié, dans le recueil dont *Mathesis* est la continuation, un travail remarquable intitulé : *Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères* (N. C. M., 1879, V, 257-263, 305-315, 337-343, 385-393, 417-425, 1880, VI, 1-7); il a été lauréat de l'Académie de Belgique en 1880, et auparavant de l'Académie des Sciences de Paris. Nous croyons donc que quelques détails biographiques et bibliographiques sur ce géomètre aussi modeste que distingué seront bien venus auprès de nos lecteurs.

Albert Ribaucour est né à Lille le 28 novembre 1845. Il est entré à l'École Polytechnique en 1865 avec le n° 17 sur 140, en est sorti, le sixième sur 133, en 1867 comme élève-ingénieur des Ponts et chaussées. Il fut nommé ingénieur ordinaire des Ponts et Chaussées à Rochefort-sur-Mer, le 1er novembre 1870, puis à Draguignan, le 1er juillet 1873, à Aix le 1er décembre 1878; il fut promu aux fonctions d'ingénieur en chef à Vesoul, le 1er septembre 1885, puis ingénieur en chef le 1er janvier suivant. Il résidait à Philippeville depuis le 1er juin 1886. C'est là qu'il

---

résolue dans un *Traité élémentaire d'Algèbre*, Bruxelles et Paris, 1880, page 140 : « *A quelles conditions les deux équations*

$$ax^2+bx+c=0 \quad et \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

ont-elles une racine commune?

Si on égale les deux valeurs de x dans ces équations, on a

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-4a'c'}}{2a'}.$$

De cette équation, qui renferme des quantités rationnelles et irrationnelles, on tire :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

c'est-à-dire que *les coefficients des deux équations doivent être proportionnels.* »

a été enlevé, en quelques heures, par un accès de fièvre pernicieuse, après une tournée sur ses chantiers, le 13 septembre 1893.

Les travaux remarquables qu'il exécuta dans l'arrondissement d'Aix et notamment ceux du bassin de décantation de Saint-Christophe, lui valurent, outre la croix de la Légion d'honneur, une médaille d'or à l'Exposition universelle de 1889.

Ribaucour a publié(*) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, l'*Institut* et le *Bulletin de la Société philomatique*, les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, la *Nouvelle Correspondance mathématique*, etc., des notes originales portant la plupart sur la théorie des surfaces (enveloppes de sphères, développées, déformation des surfaces, lignes tracées sur les surfaces, etc.), et sur la théorie de la courbure.

Déjà à l'École Polytechnique, Ribaucour avait eu l'occasion de se révéler comme un géomètre aux conceptions hardies et originales. Il justifia bien les appréciations favorables portées sur lui dès cette époque par des juges compétents. Il fut nommé répétiteur de géométrie à l'École Polytechnique, le 25 novembre 1873, en remplacement de Laguerre, mais il donna sa démission, dès le 10 février 1874, pour reprendre ses fonctions à Draguignan et achever l'importante étude de géométrie qui devait lui valoir le titre si envié de lauréat de l'Institut. En 1876, l'Académie des Sciences de Paris, lui donnait le prix Dalmont pour un mémoire considérable sur la théorie des surfaces contenant nombre de résultats nouveaux ou plus généraux que ceux de ses devanciers. « M. Ribaucour, dit le savant rapporteur, M. de la Gournerie, représente une surface par une équation ordinaire en coordonnées rectangulaires contenant deux paramètres variables et pour leur donner une signification géométrique, il considère une surface de référence sur laquelle sont deux séries de courbes qui leur correspondent. Chaque système de valeurs des deux paramètres détermine sur la surface de référence un point qui est pris pour origine des coordonnées. Les axes sont la normale et généralement les bissectrices des courbes;

(*) Voici à ce sujet quelques indications nécessairement incomplètes. N. A. M. (2), IV, 41, 321, V. 170, VI, 471, VII, 171-176, 190, VIII, 563, IX, 429-430, X, 558. Institut (première section), XXXVII, 29-30, 124-125, 222-223, 371-372, 389, XXXVIII, 60-61, 141-142, 236-237; C. R. LXVII, 1334; LXX, 390; LXXIV, 1399-1403; 1489-1491, 1570-1572; LXXV, 533-536; LXXVI, 478-482; 830-833; 1347-1351; LXXX, 642-645; XCII, 233-235.

quelquefois cependant leurs tangentes quand elles sont rectangulaires... La méthode peut être considérée comme nouvelle dans son ensemble, bien qu'on y retrouve diverses idées déjà émises par Gauss, Lamé, MM. Codazzi, Bertrand et Bonnet (C. R., 1877, Premier semestre, LXXXIV, pp. 811-812) ».

Le mémoire couronné par l'Académie de Paris n'a pas été publié ; mais la méthode qui avait été employée par Ribaucour dans ce travail lui servit encore dans sa remarquable *Étude des Élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, couronnée le 16 décembre 1880, par l'Académie royale de Belgique (Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique, 1881, t. XLIV, VI-236 p. in-4°). Ce travail important, qui est l'œuvre capitale de Ribaucour, contient une solution nouvelle du problème de Monge (intégration de l'équation aux dérivées partielles des élassoïdes), trouvée en même temps par M. S. Lie et une solution géométrique complète du problème de Björling (inscrire dans une développable donnée un élassoïde passant par une ligne tracée sur la surface développable) ; puis un grand nombre de résultats nouveaux et de vues originales très suggestives relatives à la théorie des élassoïdes et à des questions apparentées. Nous citerons, en particulier, la théorie des congruences isotropes qui lui appartient en propre (*).

Avant de soumettre ce savant Mémoire à l'Académie de Belgique, Ribaucour en avait exposé les principaux résultats dans une série de conférences faites à la Faculté des Sciences de Marseille. Dans ces leçons, éminemment originales pour le fond comme pour la forme, il se servait, avec une habileté extraordinaire, de l'intuition géométrique, pour faire saisir à ses auditeurs la genèse de ses ingénieuses découvertes.

C'est que Ribaucour était un vrai géomètre, dans le sens strict du mot ; il aurait pu prendre pour devise « *Ut pictura Mathesis* » tant il excellait à « rendre sensibles par les images de la Géométrie, les opérations intellectuelles de l'Analyse ». (P. M).

(*) Nous avons donné une analyse étendue de ce Mémoire dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1882, XIV, pp. 708-712 (Berlin, Reimer, 1885).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 800.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

On joint les extrémités C *et* D *d'un diamètre d'une conique à un foyer* F *de cette courbe, par des droites rencontrant le diamètre conjugué* C'D' *aux points* M *et* M'. *Si* O *est le centre de la conique, on a*

$$OM.OM' + OC^2 = \text{constante}.$$

Si α *est l'angle que la tangente au point* C *fait avec un rayon vecteur* CF, *on a*

$$OC' \sin\alpha = \text{constante}. \qquad \text{(Cl. Servais.)}$$

Solution par MM. Sollertinsky *et* Verbessem. Soient : F' l'autre foyer de la conique; a, b les demi-axes; M'' le point d'intersection de CF', C'D'.

On sait que $CM = CM'' = a$(*). Donc, en grandeur et en signe,

$$OM.OM'' = OC^2 - a^2,$$

d'où

$$a^2 = OC^2 - OM.OM'' = OM.OM' + OC^2.$$

Dans le triangle COM,

$$a \sin\alpha = OC.\sin COC';$$

d'où

$$a.OC' \sin\alpha = OC.OC' \sin COC' = ab,$$

et, par suite,

$$OC' \sin\alpha = b.$$

Solution par MM. Droz-Farny, Barisien et Delville. Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées de C; celles de C' sont $a\sin\varphi$, $-b\cos\varphi$, et l'on a

$$\overline{OC}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \quad \overline{OC'}^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

Les droites OC', CF ayant pour équations

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = 0, \quad y = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi - c}(x - c),$$

(*) Prolongeons F'C de CK=CF; la tangnte en C est perpendiculaire au milieu L de la droite FK; donc OL est parallèle à F'K et égale à $\frac{1}{2}$ FK ou à a, etc.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

les coordonnées de leur point d'intersection M sont

$$x = \frac{ac \sin \varphi}{a - c \cos \varphi}, \quad y = -\frac{bc \sin \varphi \cos \varphi}{a - c \cos \varphi},$$

et l'on a

$$OM = \frac{c \sin \varphi}{a - c \cos \varphi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

$$OM' = \frac{c \sin \varphi}{a + c \cos \varphi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Il en résulte

$$OM \cdot OM^2 + OC^2 = c^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2.$$

On sait que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{cy'} = \frac{b}{c \sin \varphi};$$

donc

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad \text{ou} \quad OC' \sin \alpha = b.$$

MM. Bellens et Déprez ont résolu la même question. M. Vladimirescu a démontré le théorème pour l'ellipse et l'hyperbole en se servant d'un angle paramétrique.

Question 852.

(Voir *Mathesis* (2) III, p. 152).

On considère les triangles OAB *formés par un rayon fixe* OA *d'un cercle donné et par un rayon variable* OB. *Trouver les lieux décrits par les centres des cercles tritangents, l'orthocentre, le centre du cercle des neuf points, les points de Brocard et les points de Lemoine.* (Déprez.)

Solution par M. E. N. Barisien. 1° *Lieu des centres des cercles tritangents.* Soient ω le centre du cercle inscrit, ω_0 le centre du cercle exinscrit dans l'angle BOA, ω_A le centre du cercle exinscrit dans l'angle BAO, ω_B le centre du cercle exinscrit dans l'angle ABO.

Soit aussi en P la projection du centre ω sur OA, et désignons par a le rayon du cercle, par 2θ l'angle BOA et par r le rayon vecteur $O\omega$. On a alors

$$OP + PA = a.$$

Mais $OP = r\cos\theta$ et $PA = \frac{1}{2}AB = a\sin\theta$. L'équation en coordonnées polaires du lieu de ω est par suite

$$r\cos\theta + a\sin\theta = a \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta}. \tag{1}$$

On trouve de même pour le lieu de ω_0 l'équation

$$r = \frac{a(1+\sin\theta)}{\cos\theta}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) se rapportent à la même courbe qui est la strophoïde droite dont le sommet est en O et le point double en A.

Les centres ω et ω_0 sont donc sur la même strophoïde. Le cercle passant par les quatre points A, ω, B, ω_0 est tangent en A à OA, et l'on a bien

$$O\omega \times O\omega_0 = a^2$$

ce qui résulte de la définition géométrique de la strophoïde. On démontre facilement par la géométrie que la perpendiculaire en A sur AO divise le triangle $\omega A\omega_0$ en deux triangles isoscèles.

Dans le triangle $\omega_A OB$, l'angle en B vaut $45^\circ + \frac{\theta}{2}$, l'angle en O vaut $90^\circ - \theta$: il en résulte que l'angle en ω_A a pour valeur

$$180^\circ - (90^\circ - \theta) - \left(45^\circ + \frac{\theta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\theta}{2}$$

Par conséquent, le triangle $OB\omega_A$ est isoscèle(*); donc

$$O\omega_A = OB = a$$

On trouverait de même que $O\omega_B = a$. Le lieu des centres ω_A et ω_B est donc le cercle donné.

2° *Lieu de l'orthocentre.* Soit H l'orthocentre et posons $HO = r$. Exprimons que les projections de BO et HO sur AO sont égales. On a ainsi

$$a\cos 2\theta = r\cos\theta.$$

L'équation en coordonnées polaires du lieu de H est donc

$$r = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta};$$

(*) On le démontre plus simplement en observant que la bissectrice extérieure $O\omega_A$ du triangle isoscèle OAB est parallèle à la base AB. (J. N.)

ou, en transformant en coordonnées rectilignes,

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

C'est la strophoïde droite dont le sommet est en A et le point double en O. Pour établir ce résultat il suffit de démontrer que OH, AH et la perpendiculaire en O sur OA forment un triangle isoscèle.

3° *Lieu du centre du cercle des neuf points.* Si C est le centre de ce cercle et D le milieu de AB, on a

$$OC = OD - CD.$$

Mais r et θ étant les coordonnées polaires de C, on a

$$OD = a\cos\theta, \quad CD = \frac{a}{4\cos\theta}.$$

Le lieu de C est donc la courbe

$$r = a\cos\theta - \frac{a}{4\cos\theta};$$

ou, en coordonnés rectilignes,

$$y = x\sqrt{\frac{3a-4x}{4x+a}}.$$

C'est une cubique du même genre que la strophoïde droite(*). Le point double est en O, et les tangentes en ce point double font entre elles un angle de 60°.

4° *Lieu du point de Lemoine.* Soit K le point de Lemoine et déterminons ce point par la condition que ses distances aux côtés du triangle soient proportionnelles aux côtés. Si L est la projection de K sur OA, on doit avoir

$$\frac{KL}{OA} = \frac{KD}{AB}. \tag{3}$$

Mais r et θ étant les coordonnées polaires de K, on a

$$KL = r\sin\theta, \quad KD = a\cos\theta - r, \quad OA = a, \quad AB = 2a\sin\theta.$$

Ces valeurs portées dans la relation (3) donnent l'équation du lieu de K

$$r = \frac{a\cos\theta}{1+2\sin^2\theta};$$

(*) Cette courbe est la trisectrice de Maclaurin (voir J. M. S., 1885, p. 178; 1886, pp. 205 et 255; 1891, p. 246). (J. N.).

ou, en coordonnées rectilignes,

$$x^2 + 3y^2 - ax = 0.$$

Le lieu du point de Lemoine est donc l'ellipse dont les sommets du grand axe sont O et A, et dont le petit axe a pour longueur $a : \sqrt{3}$.

5° *Lieu des points de Brocard.* Les deux points de Brocard Ω et Ω' sont définis par les relations angulaires

$$\Omega AB = \Omega BO = \Omega OA, \quad \Omega' AO = \Omega' OB = \Omega' BA.$$

Lieu du point Ω. Désignons ici par r et θ les coordonnées polaires de Ω et par 2α l'angle AOB. Les rapports des côtés aux sinus des angles opposés, dans les deux triangles $OA\Omega$ et $OB\Omega$, donnent les relations

$$\frac{r}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad \frac{r}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin 2\alpha}. \tag{4}$$

Le lieu de Ω s'obtiendra en éliminant α entre ces égalités. Par division on obtient

$$\frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad \text{ou} \quad \sin 2\alpha \cos\theta + \cos 2\alpha \sin\theta = 2\sin\theta. \tag{5}$$

De (4) et (5) on déduit

$$\sin 2\alpha = \frac{a\sin\theta}{r}, \quad \cos 2\alpha = 2 - \frac{a\cos\theta}{r}.$$

En élevant au carré et ajoutant, on obtient l'équation du lieu

$$3r^2 - 4ar\cos\theta + a^2 = 0,$$

ou en coordonnées rectilignes

$$3(x^2 + y^2) - 4ax + a^2 = 0,$$

ou encore

$$\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Le lieu de Ω est donc un cercle de rayon $\frac{a}{3}$ et ayant son centre sur OA à la distance $\frac{2a}{3}$ du point A.

Lieu du point Ω'. Le point Ω' est évidemment symétrique du point Ω par rapport à la hauteur abaissée de O sur AB. Par suite, le rayon vecteur de Ω' est égal à celui de Ω, et si ω est l'angle que $O\Omega'$ fait avec OA, on a $\theta = 2\alpha - \omega$, $2\alpha = \theta + \omega$.

Les relations (4) et (5) deviennent alors

$$\frac{r}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin(\theta+\omega)}, \quad \sin(2\theta+\omega) = 2\sin\theta, \tag{6}$$

et c'est entre ces deux relations qu'il faut éliminer θ pour avoir le lieu de Ω'. De la première, on déduit

$$tg\,\theta = \frac{r\sin\omega}{a - r\cos\omega};$$

et, par conséquent,

$$\sin\theta = \frac{r\sin\omega}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}}, \quad \cos\theta = \frac{a - r\cos\omega}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}},$$

$$\sin 2\theta = \frac{2r\sin\omega\,(a - r\cos\omega)}{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{(a - r\cos\omega)^2 - r^2\sin^2\omega}{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}.$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (6),

$$\sin 2\theta\cos\omega + \cos 2\theta\sin\omega = 2\sin\theta,$$

et réduisant, on arrive à l'équation

$$a^2 - r^2 = 2r\sqrt{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2};$$

ou, en faisait disparaître le radical,

$$3r^4 - 8ar^3\cos\omega + 6a^2r^2 - a^4 = 0.$$

Enfin, en coordonnées rectilignes,

$$3(x^2+y^2)^2 - 8ax(x^2+y^2) + 6a^2(x^2+y^2) - a^4 = 0.$$

Le lieu est une quartique, passant par le point A (point triple) et par le point situé sur l'axe des x d'abscisse $x = -\frac{1}{3}a$.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

594. Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, les deux expressions $11a + 2b$, $18a + 5b$ sont à la fois divisibles ou non divisibles par 19; elles n'ont d'autre facteur commun que 19.

595. Si d'un point d'un côté d'un triangle on mène des parallèles aux deux autres côtés, la racine carrée de l'aire de ce triangle est égale à la somme des racines carrées des aires des deux triangles déterminés par les deux parallèles.

596. Les nombres 11, 12, 13, 22 sont les seuls nombres de deux chiffres dont les carrés sont tels que retournés ils soient les carrés des nombres retournés(*). (N. GOFFART.).

597. Résoudre un triangle ABC connaissant les sommes a^2+m^2, $b^2+m'^2$, $c^2+m''^2$, où m, m', m'' désignent les trois médianes.

Soient A^2, B^2, C^2 les trois sommes; on a

$$A^2=a^2+m^2=a^2+\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=\frac{3a^2+2b^2+2c^2}{4}, \text{ etc.}$$

Résoudre les trois équations ainsi obtenues.

598. Résoudre le système d'équations :

$$\frac{k^2x}{x^2+y^2}=a, \quad \frac{k^2y}{x^2+y^2}=b.$$

Construire les solutions en supposant que les données a, b, k représentent trois longueurs. Cas particulier où $b=0$. (BACCALAURÉAT, 1892.)

599. Démontrer que si a est compris entre 2 et 5, l'expression

$$x^2-4ax+3a^2+7a-10$$

sera positive pour toute valeur de x. (BACCALAURÉAT, 1892.)

600. Dans un triangle on donne a, A et le produit $b(b+c)=k^2$. 1° Déterminer par le calcul b et c. — Discussion. — 2° Traiter la même question géométriquement.

Eliminant c entre les équations

$$b(b+c)=k^2, \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

on trouve

$$4b^4\cos^2\tfrac{1}{2}A-b^2(a^2+4k^2\cos^2\tfrac{1}{2}A)+k^4=0,$$

$$8b^2\cos^2\tfrac{1}{2}A=a^2+4k^2\cos^2\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{a^4+8a^2k^2\cos^2\tfrac{1}{2}A-16k^4\cos^2\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}A};$$

le radical s'annule pour $a^2=-4k^2\cos^2\frac{1}{2}A\pm 4k^2\cos\frac{1}{2}A$, donc les valeurs de b^2 ne sont réelles que si $a^2>4k^2\cos\frac{1}{2}A(1-\cos\frac{1}{2}A)$. Cette condition est suffisante pour que les valeurs de b^2 soient en même temps positives. Les valeurs correspondantes de c doivent être positives, ce qui entraîne $k^2>b^2$; si l'on remplace b^2 par sa valeur, on voit que le radical doit être pris avec le signe — et l'on trouve la condition $a^2>2k^2\sin^2\frac{1}{2}A$.

Prolongeons BA de AD = AC; dans le triangle BDC on connaît l'angle BDC $=\frac{1}{2}$A le côté BC $=a$ et le produit des côtés BD. DC $=2k^2\cos\frac{1}{2}$A. Sur une

(*) Les trois questions 594, 595, 596 sont extraites du *Journal de Vuibert*.

corde $BC = a$ on construira un segment capable de l'angle $\frac{1}{2}A$; si R est le rayon du cercle, la hauteur abaissée de D sur BC sera égale à $\frac{BD.DC}{2R} = \frac{R^2 \cos\frac{1}{2}A}{R}$. Cette hauteur doit être moindre que la flèche du segment capable ou $R(1+\cos\frac{1}{2}A)$, et plus grande que la distance du centre à BC, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

892bis. On donne une quadrique de révolution et une sphère. Sur le plan qui contient le centre de la sphère et l'axe de la quadrique on projette l'intersection de ces deux surfaces. On sait que la projection est un arc de parabole, et l'on propose de trouver graphiquement, à l'aide de la question 875 (p. 215) : 1° le sommet de cette parabole; 2° le point où la tangente à cette parabole a une direction donnée. (V. JAMET.)

Supprimer la question 892, p. 264, déjà publiée, p. 215, n° 875.

×**895.** Résoudre le système

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=z, \quad 2x+2y+p=0, \quad z^4+pz^2+q=0,$$

et chercher les conditions pour que les valeurs des trois inconnues soient réelles. (*Baccalauréat*, POITIERS, 1893).

×**896.** Le plus petit multiple $1, 2, 3, \ldots 2n$ est égal à celui de $(n+1), (n+2), \ldots 2n$. (E. CATALAN.)

897. Soient S l'aire d'une ellipse, S_1 celle de la podaire du centre de cette ellipse, S_2 celle de l'anti-podaire du centre de la même ellipse. Montrer que l'on a la relation $3S^2 - S_1^2 = 2SS_2$. (E. N. BARISIEN.)

898. Soient P, Q les projections d'un point M d'une ellipse sur les axes principaux. Trouver l'aire de l'enveloppe de l'axe radical des cercles décrits sur MP et MQ comme diamètres. (E. N. BARISIEN.)

899. Les droites telles que le centre des moyennes distances de leurs points d'intersection avec une parabole semi-cubique, soit sur l'axe de la courbe, enveloppent une autre parabole semi-cubique. (E. N. BARISIEN.)

×**900.** Soient A′, B′, C′ les pieds des bissectrices intérieures des angles d'un triangle ABC, et soient A″, B″, C″ les symétriques de ces points par rapport aux sommets correspondants A, B, C. Trouver le rapport des surfaces des triangles A″B″C″, ABC en fonction des côtés de ABC.

Rectification. — Page 244, ligne 22, lire dx au lieu de dz.

TABLE DES MATIÈRES(*).

×ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

Sur une équation indéterminée; par M. E. Catalan 105
Questions d'arithmologie; par M. de Rocquigny 112, 165
Théorème d'arithmétique (J. N.) 137, 168
Question 775; solution par M. E. Fauquemberghe 70
Question 801; solution par MM. Bergmans, Boutin, etc. 144
Question 838; solution par M. Mandart. 235
Question 855; solution par M. E. Catalan 256

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Sommation des sinus et des cosinus d'angles en progression arithmétique; par M. L. Meurice. 19
×Égalités entre quantités proportionnelles; par M. J. Wasteels. 57
×Résolution trigonométrique de l'équation du second degré; par M. Bloume . 64
Fonction représentative des coefficients du binône; par M. Laisant. 153
×Récréations et pièges mathématiques 184, 224
×Limite ou génératrice (P. M.) 225
×Condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune; par M. E. Gelin 265
Question 17; solution par M. Fauquemberghe. 48
×Question 571; solution par MM. Joachimescu et Vladimirescu. 50
×Question 798; solution par MM. Delahaye et Listray 55
Question 754; solution par M. Servais 67
×Question 794; solutions par MM. Van Dorsten et Catania 96
×Question 796; solution par M. Mandart. 97
×Question 807; solution par Sollertinsky 123, 196

(*) Pour les rectifications voir pp. 32, 80, 128, 216, 240, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

×Question 840; solution par M. Lippens 142
×Question 820; solution par MM. Retali, Quint, etc. 173
×Question 832; solution par M. Déprez 206
×Question 853; solution par MM. Delahaye et Droz 210
Question 821; solution par M. Decamps 254

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le cercle orthocentroïdal; par Mme Prime 33
Sur le plan; par M. J. Delbœuf 47, 135
Sur la construction d'une moyenne proportionnelle 32, 47, 136
Sur le théorème de Stewart (d'après M. Mackay) 63
Propriétés de deux triangles; par M. J. Wasteels 89
Un nouveau quadrateur. 137
Volume et centre de gravité du prismatoïde; d'après M. Frétille . . . 138, 169
Sur quelques propriétés du triangle; par M. E. Bertrand. 155
Sur les Brocardiens d'un point par rapport à une ligne; par M. Socoloff . . 166
Pièges mathématiques 169, 184, 224
Questions de mécanique; par M. Meurice 222, 243
Application de la formule du prismatoïde; par M. Droz 247
Trisection de l'angle; d'après M. Pegrassi 247
Une nouvelle quadrature du cercle 248
Encore un quadrateur; par M. E. Gelin. 248
Question 774; solutions par MM. Droz-Farny, Emmerich, etc. 24
Question 787; solution par MM. Déprez, etc.. 27
Question 788; solutions par MM. Delville, etc.. 118
Question 797; solution par M. Sollertinsky 121
Question 812; solutions par MM. Brocard, Quint, etc. 123
Question 793; solution par M. Delville 142
Question 801; solution par M. Brocard 170
Question 824; solution par MM. Quint, Camus, etc. 203
Question 843; solutions par MM. Absolonne, Servais, etc. 206
Question 786; solutions par MM. Déprez et Neuberg. 231
Question 854; solution par MM. Droz et Thiry 238
Question 808; solutions par MM. Sollertinsky, Déprez, etc 251

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur un nouveau groupe de trois paraboles; par M. Mandart 10
Une propriété des quadriques et sur la polhodie; par M. Cl. Servais . . 14, 64
Théorèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre; par M. Barbarin . 60
Sur l'hyperbole de Feuerbach (J. N.) 81
Sur l'hyperbole équilatère (J. N.). 92
Sur deux paraboles circonscrites à un quadrangle donné; par M. Kluyver. . 106

Pages.

Sur les coniques homofocales; par M. Cl. Servais. 129
Une propriété des quadriques homofocales (J. N.). 136
Sur les quadriques homofocales, par MM. Servais et Neuberg 186
Sur quelques théorèmes de MM. Fouret et Jamet; par M. E. Cesáro . . . 217
Question 743; solution par M. Cl. Servais 21
Question 771; solution par M. Sollertinsky. 23
Question 787; solution par MM. Mandart, Droz, etc. 29
Question 781; solutions par MM. Mandart, Droz, etc. 71
Question 805; solution par M. Schoute 171
Question 810; solution par MM. Quint, Déprez, etc. 172
Questions 845, 850; solutions par MM. Servais et Neuberg 208
Question 827; solution par MM. Bellens, Quint, etc. 233
Question 802; solution par MM. Sollertinsky. 250
Question 858; solution par MM. Droz, Mandart, etc. 258
Question 809; solutions par MM. Sollertinsky, Droz, etc. 273
Question CCCCXI (N. C. M.); solution par M. E. Barisien 75
Question CCCCXIV (N. C. M.); solution par M. E. Barisien 98
Question CXIX (N. C. M.); solution par M. E. Barisien 150
Question CCCCXXIII (N. C. M.); solution par M. E. Barisien 173
Question CXXI (N. C. M.); solutions par MM. Genty et Sollertinsky . . . 211
Question CCCXXXIX (N. C. M.); solution par M. Barisien. 259

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur certaines courbes du quatrième ordre; par M. Balitrand. 5
Question 780; solution par MM. Droz et Déprez 52
Question 776; solution par M. Droz. 70
Question 779; solution par M. Fraipont. 95
Question 819; solution par M. Gob 144
Question 791; solution par M. Morel. 201
Question 852; solution par M. Barisien. 274
Question DXXXVIII (N. C. M.); solution par M. E. Genty. 100
Question CCCXXVIII (N. C. M.); solution par M. Barisien. 125

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur la formule de Leibniz (P. M.). 36
Aire de la cycloïde; d'après Holzmüller. 166
Détermination d'une intégrale; d'après Walton 167
Question de géométrie infinitésimale (Q. 792); par M. E. Cesáro. . . . 177, 186
Démonstration d'un théorème de M. Appell; par M. E. Cesáro 241
Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde (J. N.) 244
Question 777; solution par M^me^ Prime et M. Lisbray. 26
Question 795; solutions par MM. P. Delville, Mandart, etc. 73

Pages.

Question 765; solution par M. Joachimescu 93
Question 792; solutions par MM. Mansion, Cesáro, etc. . . 120, 140, 177, 186
Question 826; solution par M. E. Cesáro 205
Question 842; solution par M. V. Jamet. 295
Question 856; solution par M. E. Cesáro 257
Question CIV (N. C. M.); solution par un Abonné. 124

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE; ETC.

M. Cantor. Geschichte der Mathematik, II, 2. (P. M.). 16
J. Casey. A Sequel to Euclid (B. M.) 17
Annuaire du bureau des longitudes. 18
Antomari. Cinématique et dynamique (J. M.). 39
Chomé. Géométrie descriptive (P. M.). Réponse (Chomé). 40
Notice sur Gerono 46
R. Ball. Mathematical Recreations. 65
F. Muller. Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, etc. 66
A. Laisant. Recueil de problèmes de mathématiques (J. N.) 66, 228
E. Lebon. Géométrie descriptive. 67
E. Lucas. Récréations mathématiques, III (H. Brocard). 90
Revue semestrielle des publications mathématiques (P. M., J. N.) 92
Carvallo. Mécanique (J. N.). 115
Fontené. L'hyperespace 116
J. Tannery et J. Molk. Fonctions elliptiques, I 116
Le centenaire de Lobatchefsky 117, 193
P. Sauvage. Lieux géométriques (J. N.) 131
A. Rebière. Mathématiques et mathématiciens 132
H. Vuibert. Annuaire de la jeunesse 133
Index du répertoire des seiences mathématiques 133
Une curieuse coïncidence 139
J. Jamet. Mécanique 162
G. de Longchamps. Supplément au cours de mathématiques spéciales . . 163
E. Humbert. Arithmétique (J. Tannery et P. M.). 196
A. Picard. Traité d'analyse, II. 199
B. Carrara. Teoria delle quantita complesse. 229
R. Bettazi. Rizolutione dei Problemi 230
P. Barbarin. Calculs logarithmiques 230
Sur l'utilité de la géométrie non euclidienne (P. M.) 249
Ribaucour. 270

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 541-548, 549, 550-551, 551ᵃ-560, 561-565, 566-568, 569-570, 571-584, 585-586, 587-593, 594-600 . pp. 30, 55, 78, 101, 126, 151, 175, 210, 239, 261, 286

Pages.
Concours de l'École Polytechniqne de Paris. 139, 187
Concours pour l'admission à Saint-Cyr 190

SUPPLÉMENT.

I. Rayon de courbure de certaines courbes planes par M. J. Neuberg. . pp. 1-13
II. Essai de géométrie analytique générale; par M. J. De Tilly . . . pp. 1-80

QUESTIONS(*).

	POSÉE (1) I ou (2) I	RÉSOL (2) II
17	30 (28)	48
95	206 (28)	
	(1) III ou (2) I	
252	143 (28)	
267	175 (28)	
	(1) IV ou (2) I	
×333	119 (29)	
353	159	R
×357	159	R
383	231 (29)	
387, 2e p.	231 (29)	
	(1) V ou (2) I	
411	23 (29)	
415	46	
	(1) VI ou (2) I	
505, 2e p.	23 (30)	
×513	71 (30)	
	(1) VII ou (2) I	
×571	126 (30)	50
594	264 (31)	
597	280	R
598	280 (31)	
	(1) VIII ou (2) I	
×634	279	R
×635	279 (31)	
	(1) X	
×677	72	R
×681	95	R
699	279	R
	(2) I	
743	263	20
	(2) II	
754	32	67
765	104	93

	POSÉE (2) II	RÉSOL (2) III
767	128	R
771	152	23
×774	152	24
×775	176	70
776	176	70
777	176	26
778	176	
779	215	95
780	215	52
781	215	71
782	215	
×783	216	R
784	216	R
785	216	
×786	216	231
×787	216	28
×788	240	119
×789	240	R
790	240	R
791	240	201
792	240	120, 140
		177, 186
×793	263	142
×794	264	96
795	264	72
×796	264	97
797	264	121
×798	281	55, 58
×799	281	
800	281	R
	(2) III	
×801	31	170
802	31	250
×803	31	
×804	31	144
805	32	171
806	32	R

	POSÉE (2) III	RÉSOL (2) III
×807	32	122
×808	32	251
809	32	273
810	55	172
×811	55	
×812	56	123
813	56	R
×814	56	
815	56	
×816	56	
817	56	R
818	56	R
819	78	144
×820	79	172
×821	79	254
×822	79	R
823	79	R
×824	80	203
825	80	
826	80	205
827	80	233
×828	103	
829	103	R
830	103	R
831	103	
×832	104	206
833	104	R
834	104	R
×835	104	
836	104	R
837	127	R
838	127	235
×839	128	R
×840	128	149
×841	128	
842	128	235
×843	128	206
844	128	R
845	128	208

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

	POSÉE (2) III	RÉSOL (2) III
846	151	R
847	151	R
848	152	
849	152	R
850	152	209
×851	152	R
852	152	274
×853	152	210
×854	152	238
×855	175, 214	256
856	175	257
857	176	R
858	176	258
859	176	R
×860	176	R
×861	176	R
×862	176	R
×863	176	R
×864	214	
865	214	R
×866	214	R
867	214	R
×868	215	R
×869	215	R
×870	215	R
871	215	R
872	215	R
×873	215	R
874	215	R
875	215	R
876	216	
×877	216	R
×878	216	R
×879	216	R
880	239	R
881	240	R
882	240	
×883	240	R
884	240	
885	240	R
×886	240	
887	263	
×888	263	R
×889	264	R
890	264	R
891	264	R
892	264, 288	
893	264	R
894	264	R
×895	288	
×896	288	
897	288	
898	288	
899	288	
×900	288	

Questions de la Nouvelle correspondance.

No	Page.
104	124
119	150
121	211
338	125
339	259
411	75
414	98
423	173
528	100

TABLE DES NOMS.

Abel, 37, 200.
Abonné, 124, 144, 150.
Absolonne, 207, 233, 258.
Ancellin, 101.
Antonari, 39.
Appell, 241.
Arago, 138.
Archimède, 16.
Argand, 229.
Bachet, 16, 198.
Balitrand, 5.
Barbarin, 60, 230.
Barisien, 75, 80, 98, 104, 125, 128, 149, 150, 152, 173, 176, 208, 215, 233, 239, 240, 258, 259, 263, 273, 274, 288.
Baschwitz, 32, 80, 122, 137, 168, 205.
Beliach, 102.
Bellens, 120, 143, 172, 203, 233, 274.
Beltrami, 135.
Benedetti, 16.
Bergmans, 144.
Bernoulli, 183.
Bertrand (E.), 155.
Bertrand (J.), 272.
Besso, 56, 104.
Bettazi, 230.
Billy (de), 16.
Bierens de Haan, 132.
Björling, 272.
Bloume, 64.
Bobillier, 24.
Bombelli, 16.
Bonnet (Ossian), 18, 272.
Bordage, 32.
Bouquet, 151.
Bouquet de la Grye, 18.
Boutin, 81, 144.
Brasseur, 40.
Brianchon, 251.
Briggs, 16.
Briot, 151.
Brocard, 18, 56, 91, 93, 95, 98, 121, 123, 140, 149, 170, 215, 231, 234.
Bürgi, 16.
Callandreau, 229.
C. (A.), 104, 119, 206, 264.
Camus, 203, 234.
Cantor, 16, 66.
Cardinaal, 92.
Carrara, 219.
Carvallo, 39, 105, 163.
Casey, 17, 33.
Cassanac, 46.
Catalan, 31, 32, 47, 50, 56, 72, 80, 103, 105, 124, 127, 136, 137, 138, 144, 151, 175, 214, 235, 240, 254, 280.
Catania, 97, 119, 143.
Cavalieri, 16.
Cauchy, 48, 200.
Césaro (E.), 23, 70, 177, 186, 205, 215, 217, 240, 241, 257.
Chasles, 64.
Chomé, 40.
Christie, 214.
Codazzi, 272.
Clausen, 137.
Coelingh, 92.

Collette, 258.
Comberousse (de), 47, 134, 230.
Cornu, 18.
Cremona, 101.
De Boer, 92.
Decamps, 55, 96, 98, 143, 172, 173, 263, 254.
de la Gournerie, 271.
Delahaye, 55, 143, 169, 203, 210, 239.
Delannoy, 91.
Delaunay, 36, 163.
Delbœuf, 47, 134.
Delisle, 46.
Delville. 67, 72, 98, 119, 142, 144, 273.
Denys, 53, 67, 96.
Déprez, 24, 26, 28, 31, 52, 54, 67, 70, 72, 96, 104, 118, 119, 121, 124, 143, 152, 172, 173, 176, 201, 206, 231, 233, 251, 252, 274.
Deruyts (J.), 132.
Descartes, 16.
Desargues, 16.
Dessoye, 248.
Droz Farny, 23, 24. 28, 31, 52, 67, 70, 71, 96, 119, 123, 143, 144, 171, 172, 210, 234, 238, 240, 247, 250, 251, 258, 273.
Duhamel, 230, 238.
Dwoling, 17.
Emmerich, 25, 69.
Escher, 92.
Euclide, 17, 117.
Euler, 105.
Falisse (Fr.), 17.
Faye, 18.
Fauquembergue, 48, 70, 144.
Fermat, 16, 65.
Feuerbach, 81.
Fibonacci, 256.
Folie, 132.
Fontené, 116.
Fouret, 217.
François, 143, 203.
Fraipont, 26, 95.
Fretille, 138.
Galilée, 16.
Gauss, 117, 229, 272.
Gelin (E.), 198, 225, 249, 265.
Genty, 101, 211.
Genocchi, 36.
Gergonne, 23, 46, 83.
Gerono, 46, 132.
Ghuys, 94.
Girard, 16.
Giudice, 128.
Gob, 140, 144, 217.
Goedseels, 43.
Goffart, 279.
Gouzy, 32.
Graindorge, 132.
Greenstreet, 96, 124, 128, 151, 173, 233, 235.
Grégoire de St-Vincent, 16.
Guldin, 16.
Haas (C. de), 124, 172, 173, 234.
Halsted, 138.
Hamilton, 65.
Harriot, 16.
Heller, 66.
Helmholtz, 135.
Hermite, 37.
Holzmuller, 167.
Hoppe, 100.
Houël, 229.
Hudde, 16.
Humbert. 195.
Jacobi, 37, 137.
Janssen, 18.
Jamet, 20, 152, 186, 208, 216, 221, 235, 264, 280.
Jerabek, 53, 143.
Joachimescu, 50, 93.
Kahn, 262.
Kapteyn, 92, 132.
Kepler, 16.
Klein (F.), 135.
Kluyver, 92, 106.
Korteweg, 95.
Kummer, 168.
Kunze, 136.
Labenne, 79, 143.
Lagrange, 37, 165.
Lagrange (Ch.), 132.
Laisant, 66, 91, 97, 153, 185, 215, 224, 228.
Lamé, 272.
Lantshere (de), 79.
Langley, 24.
Latars, 138.
Lebon, 67.
Legendre, 47.
Leibniz, 16, 36.
Lembourg, 121.
Lemoine, 29, 32, 34, 47, 81, 90, 103, 136, 158, 224, 251.
Lie, 272.
Lippens, 249.
Listray, 26, 55, 143, 144.
Lobatschefsky, 117, 193.
Locwy, 18.
Longchamps (de), 23, 63, 169, 192.
Lopez, 137.
Lucas (Ed.), 70, 90, 98, 121, 224.
Mackay, 48, 63.
Maclaurin, 276.
M'Cay, 87.
Maleyx, 151.
Mandart, 10, 26, 28, 32, 53, 55, 72, 73, 79, 81, 96, 97, 120, 140, 142, 144, 169, 171, 177, 211, 235, 239, 258.
Mannheim, 40.
Mansion, 18, 39, 40, 47, 75, 92, 121, 134, 136, 140, 228, 249, 272.
Mantel, 92.
Massau, 40, 132.
Matrot, 198.
Maurolycus, 16.
Mennesson, 75, 131.
Metius, 16.
Meurice, 19, 31, 174, 185, 222, 243.
Mister, 139, 140, 235, 247.
Mittag-Leffler, 116.
Molenbroek, 92.
Molk, 116.
Monge, 21, 40.
Morel, 31, 52, 56, 170, 172, 202.
Muller, 66.
Mydorge, 16.
Nagel, 23, 86.
Neil, 16.
Neper, 16.
Neuberg, 6, 17, 21, 28, 29, 32, 66, 76, 78, 81, 92, 93, 103, 115, 120, 131, 132, 136, 137, 152, 169, 176, 187, 190, 206, 208, 210, 211, 215, 216, 222, 233, 235, 246, 248, 258, 264, 275, 276; supp. I.
Neumann, 200.
Newton, 16.
Nicolaïdes, 150.
Noether, 200.
Niyland, 244.
Ocagne (d'), 134.
Osborne, 240.
Ozanam, 185.
Pareira, 92.
Pascal, 16, 145.
Pastore, 230.
Pegrazzi, 248.
Perrier, 18.
Perrin, 185.

Petersen, 101, 230.
Petit-Bois, 264.
Pfaff, 36.
Picard (E.), 199.
Poincaré, 134, 199, 249.
Poinsot, 64.
Poirier, 248.
Pomey, 246.
Poncelet, 42.
Prime (Mad.), 26, 28, 33, 96, 261.
Quint, 124, 172, 173, 203, 233.
Rahusen, 92.
Ramus, 16.
Rebière, 132, 184.
Renshaw, 216.
Retali, 128, 152, 173, 208, 234.
Ribaucour, 270.
Riemann, 135, 199.
Roberval, 16, 163.
Rocquigny (de), 105, 112, 164, 215.
Romanus, 16.
Rouché, 46, 47, 134, 230.
Rouse Ball, 65.
Ruchonnet, 229.
Saint-Venant (de), 229.
Salmon, 130.
Sauvage, 136.
Schaar, 75.
Schering, 135.
Schoner, 16.
Schoute, 24, 56, 92, 132, 171, 215.
Schouten, 92.
Schwarz, 199.
Schwenter, 16.
Servais, 14, 20, 32, 68, 71, 129, 186, 207, 251, 273.
Siebeck, 229.
Simson, 63.
Sluse, 16.
Smeets, 132.
Snellius, 16.
Socoloff, 167.
Sollertinsky, 23, 25, 121, 123, 128, 176, 212, 216, 250, 251, 273.
Steiner, 93.
Stevin, 16.
Stewart, 63.
Strode, 47, 136.
Sturm, 132.
Tacquet, 16.
Tannery (J.), 106, 195.
Tate, 231.
Tesch, 92.
Tebay, 214.
Thiry (Cl.), 64, 238.
Thomae, 229.
Tilly (De) 132, 135, supp. II.
Tisserand, 18.
Torricelli, 16.
Tucker, 28, 152, 156, 238,
Ueberweg, 135.
Uhlig, 136.
Van Aller, 92.
Van Aubel (H.), 102, 216.
Van Ceulen, 16.
Van den Broek, 50.
Van Dorsten, 95, 96.
Van Heuraet, 16.
Van Mourik, 92.
Vassilief, 118.
Verbessem, 273.
Verbiest, 132.
Verdeyen, 211.
Versluys, 92.
Viète, 16.
Vinot, 185.
Vladimirescu, 50, 170, 172, 234, 250, 274.
Vries (de), 92.
Vuibert, 30, 64, 133, 192, 207, 278.
Wallis, 16, 47, 136.
Walton, 168.
Wasteels, 57, 89, 121.
Weierstrass, 116.
Winkler, 37.
Wijthoff, 92.
Wolf, 66.
Xylander, 16.
Zeemann, 92.
Zeller, 198.

ESSAI

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE,

par le colonel J. DE TILLY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE.

Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 10 mai 1892)

(Extrait du tome XLVII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1892.)

ESSAI

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE.

1. Il y a deux manières d'exposer la géométrie.

Dans l'une, à l'usage de l'enseignement élémentaire, on s'appuie, au début, sur un certain nombre de données expérimentales, et alors on peut ne supposer chez le lecteur ou l'élève que des connaissances analytiques très bornées.

L'autre exposition, pour laquelle il existe de nombreux documents, mais qui n'a jamais été faite, je pense, d'une manière complète et absolument concluante, est plus scientifique : elle s'appuie sur une connaissance approfondie des ressources de l'analyse et établit toutes les formules de la géométrie dans un sens purement abstrait et absolument *rigoureux*, sans rien emprunter à l'expérience, laquelle n'intervient (avec le caractère d'*approximation* qui lui est propre) qu'au moment où l'on veut passer aux applications pratiques.

2. L'objet principal de la géométrie est la recherche des relations entre les intervalles des couples de points situés dans l'espace. Toutes les formules, tous les théorèmes de la géométrie peuvent se réduire, en effet, à des relations entre ces intervalles, parce que les autres idées qui y figurent en apparence ne sont que conventionnelles, tandis que l'intervalle entre deux points est une idée absolue et irréductible.

3. J'en ai déjà donné, dans un de mes ouvrages (*), un exemple assez frappant, que je vais reproduire.

Théorème. La somme des trois angles d'un triangle rectiligne est égale à deux angles droits.

Traduction en intervalles. Étant données, entre les 28 intervalles (12), ... (78), de 8 points 1, ... 8 de l'espace, les 12 relations (13) = (23), (14) = (24), (15) = (25), (16) = (26), (17) = (27), (18) = (28), (34) = (45), (35) = 2 (34), (36) = (37) = (48), (46) = (47) = (58), on aura nécessairement la treizième relation : (34) = (68), ou bien (34) = (78).

4. Prenons encore un autre exemple :

Formule : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Traduction en intervalles. Étant données, entre les 10 intervalles (12), ... (45), de 5 points de l'espace, les 2 relations :

(14) + (24) = (12), (15) + (35) = (13), on aura nécessairement la troisième relation :

$$\frac{(12)^2 + (13)^2 - (23)^2}{(12)(13)} = \frac{(14)^2 + (15)^2 - (45)^2}{(14)(15)}.$$

5. Le dernier exemple montre, plus clairement encore que le premier, que l'idée d'angle est purement conventionnelle. Il en est de même des idées d'aire et de volume. En effet, de même que la longueur d'une ligne est l'intégrale d'un intervalle élémentaire, l'aire est l'intégrale d'un triangle et le volume l'intégrale d'un tétraèdre. Or, l'aire du triangle et le volume du tétraèdre s'expriment en fonction de simples intervalles, et leur mesure peut leur servir de définition.

(*) *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique,* p. 72. On a introduit 8 points au lieu de 7, pour éviter une objection qui ne portait pas sur le fond de l'idée, et que le lecteur trouvera aisément en comparant les deux énoncés.

6. Mais il faut maintenant reprendre les choses de plus loin, en nous plaçant au seuil de la géométrie.

Cette science n'étant que celle des intervalles, et l'intervalle lui-même n'étant, *a priori*, qu'un nombre caractérisant un couple de points, on peut imaginer d'abord un système de géométrie dans lequel tous les intervalles seraient arbitraires.

Prenons, par exemple, 1 000 points dans l'espace, lesquels auront entre eux 499 500 intervalles. Puis, choisissons 499 500 nombres au hasard, et attribuons l'un de ces nombres à chacun des intervalles. Imaginons ensuite que l'imposition d'un nombre à chaque intervalle soit continuée, sinon pour tous les points de l'espace, du moins pour tous ceux que l'on aura à considérer spécialement dans le cours d'une opération déterminée. On aurait ainsi un système complet de géométrie. Mais ce serait une géométrie rudimentaire, se réduisant à un catalogue des intervalles des points de l'espace et sans relations possibles entre ces intervalles, puisque ceux-ci ont été choisis au hasard.

7. Si l'on veut qu'il existe une géométrie, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire une géométrie comprenant des relations, des formules entre les intervalles, il faut donc se poser le problème suivant :

Choisir les nombres correspondant aux intervalles des couples de points de l'espace, non plus d'une façon tout à fait arbitraire, mais de manière qu'il puisse exister entre ces nombres des relations générales, d'ailleurs quelconques.

Et si le problème ainsi posé, sans introduction d'aucune condition supplémentaire, sans aucun appel à l'expérience, conduisait à une solution déterminée, dans laquelle il ne resterait plus ensuite qu'à fixer la valeur d'une constante pour retrouver les formules connues de la géométrie, il me semble que la philosophie des sciences mathématiques aurait fait un pas décisif.

C'est ce que je vais essayer de réaliser dans la mesure de mes

forces et en signalant ce qui laisse encore à désirer au point de vue purement analytique.

8. Le point de départ est donc celui-ci : si nous voulons qu'il existe une géométrie théorique, nous devons admettre qu'on ne puisse pas augmenter indéfiniment le nombre des points choisis dans l'espace, en laissant *tous* les intervalles arbitraires ; on devra donc s'arrêter à un nombre n de points, à partir duquel il existera au moins une relation entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles correspondants.

De plus, si l'on veut que les formules de la géométrie soient non pas *locales* (*), mais applicables à l'espace tout entier, il faudra, non seulement que le nombre n soit le même dans tout l'espace, mais encore que la relation ou les relations entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles soient aussi les mêmes.

9. Lorsque le nombre de points à partir duquel les intervalles ne sont plus tous arbitraires, est égal à n, on dit que la géométrie est de la $n-2^e$ espèce (**), ou à $n-2$ dimensions.

Étant admis que dans cette géométrie les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles de n points ne sont pas tous arbitraires, on peut se demander combien de relations il existe entre eux. D'abord, on ne peut en admettre plus de $n-1$, car si l'on supposait qu'il en existât n, distinctes et non contradictoires, on pourrait, entre elles, éliminer les $n-1$ intervalles de l'un des points à tous les autres, et il resterait *une* équation entre les intervalles de ces $n-1$ autres points. La géométrie considérée ne serait donc en réalité qu'à $n-3$ dimensions.

(*) Un exemple de formules locales serait donné, dans la géométrie à trois dimensions, par les formules applicables seulement aux points d'une surface ou d'une ligne; mais on peut évidemment les concevoir autrement, et on les étudierait comme nous allons le faire pour l'espace tout entier, en ayant soin de ne choisir que les points répondant à ces formules locales.

(**) Il est tout naturel qu'il faille déduire 2 unités, car un seul point ne donne pas d'intervalle, et 2 points (ou un seul intervalle) ne donnent pas de relation. Il en faut donc au moins 3 pour constituer la *première* espèce de géométrie, donc n pour la $n-2^e$ espèce.

10. Mais je dis, de plus, que le nombre des relations ne peut surpasser l'unité.

En effet, considérons d'abord trois points, dans l'espace à $n - 2$ dimensions dont il s'agit.

Si, entre leurs trois intervalles, il existait deux relations, il s'ensuivrait qu'un de ces intervalles déterminerait les deux autres. Ainsi, étant donnés deux points A et B, l'intervalle AC serait déterminé d'avance, quel que fût le troisième point C que l'on choisirait, et puisque nous voulons que les formules soient les mêmes dans tout l'espace, on en conclut immédiatement qu'à tous les couples de points de l'espace correspondrait un seul et même intervalle (*). Nous ne dirons pas que cela est impossible; car cela ne l'est pas, analytiquement parlant, et nous ne voulons rien emprunter à l'expérience. Nous dirons seulement que ce système de géométrie est à prendre ou à laisser, et nous écarterons cette solution insignifiante, pour continuer la recherche des autres solutions du problème.

Ainsi donc, entre nos trois intervalles, il ne peut exister deux relations.

S'il en existe une seule, nous sommes dans les termes de l'énoncé : on a alors $n = 3$, et la géométrie est à une seule dimension.

S'il n'en existe pas, il est acquis que nous pouvons fixer arbitrairement les trois intervalles entre trois points (**).

Considérons alors un système de quatre points. Les trois premiers (1, 2, 3) peuvent être pris au hasard quant à leurs intervalles. Le système (1, 2, 4) peut aussi être pris arbitrairement, c'est-à-dire que les intervalles (12), (13), (14), (23), (24) peuvent être pris arbitrairement, d'après ce qui précède. Alors (34) est déterminé ou ne l'est pas.

(*) Il en serait ainsi, tout au moins, si les relations existantes ne donnaient qu'une seule valeur pour l'intervalle calculé, et l'on voit aisément ce qui arriverait dans le cas des valeurs multiples.

(**) Au moins dans de certaines limites. On veut dire que deux d'entre eux ne déterminent pas le troisième, mais lui laissent encore une infinité de valeurs possibles, formant suite continue. Cette observation se reproduira plus loin.

Dans le premier cas, nous retrouvons notre énoncé. Il existe une seule relation entre les 6 intervalles des 4 points, et $n = 4$.

Dans le second cas, il est acquis que les 6 intervalles de 4 points peuvent être pris arbitrairement.

Dès lors, considérons 5 points : 1, 2, 3, 4, 5. Le système (1,2,3,4) est arbitraire. Il en est de même du système (1,2,3,5). Donc les intervalles (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), peuvent être choisis au hasard, et il ne reste à fixer que (45).

Continuant ainsi de proche en proche, on verra clairement que si la géométrie considérée est d'ordre $n-2$, mais irréductible à un ordre moindre, il n'existe entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles de n points qu'une seule relation analytique, nécessairement symétrique par rapport aux intervalles.

11. C'est cette relation dont il faut chercher la forme, d'après la seule condition qu'elle puisse exister sans contradiction pour *tous* les groupes de n points dont on peut remplir l'espace.

Les géométries à une et à deux dimensions étant comprises dans la géométrie à trois dimensions (comme on le sait et comme on le verra ci-après), et la géométrie à plus de trois dimensions n'ayant aucune application en dehors de l'analyse pure, nous prendrons *comme exemple,* dans ce qui va suivre, la géométrie à trois dimensions, c'est-à-dire que nous supposerons $n - 2 = 3$, d'où $n = 5$, et nous aurons à considérer la relation entre les 10 intervalles de 5 points.

12. Représentons provisoirement cette relation par

$$\psi\,[(12), \ldots (45)] = 0,$$

ou, pour abréger, par

$$(12345) = 0.$$

Les 10 intervalles de ces 5 points étant connus, cherchons à y ajouter un sixième point et à déterminer les 5 intervalles supplémentaires (16),... (56). On peut choisir au hasard trois intervalles tels que (16), (26), (36), mais alors (46) et (56) ne sont plus arbitraires, car ils doivent satisfaire respectivement aux

relations

$$\left.\begin{array}{l}(12346)=0,\\(12356)=0.\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Ces deux relations, ainsi que la relation

$$(12345)=0,$$

sont donc analytiquement réalisables pour un système de 6 points, même avec une forme arbitraire de ψ ; mais comme on veut que la relation ψ soit vérifiée dans *tout* système de 5 points, on devra avoir en outre :

$$\left.\begin{array}{l}(12456)=0\\(13456)=0\\(23456)=0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ainsi donc les équations (2) doivent être des conséquences directes et purement analytiques des équations (1). Par exemple, la première des trois équations (2) doit être le résultat immédiat de l'élimination des intervalles (13) et (23) entre les équations (1), cette élimination faisant disparaître en même temps les intervalles (34), (35) et (36). Toute forme ψ, qui ne satisfait pas à cette condition purement analytique, est impossible, comme représentation géométrique d'un système de cinq points.

Nous énoncerons cette condition sous la forme suivante : « Si, dans un système de six points, trois des six équations comprenant chacune dix des quinze intervalles, sont vérifiées, les trois autres doivent l'être aussi », et nous l'appellerons *la condition des six points.*

13. Nous allons démontrer maintenant que cette condition imposée à la forme ψ et qui est *nécessaire* pour l'existence d'un système de géométrie, est aussi *suffisante*, c'est-à-dire qu'elle permet l'existence d'une relation semblable à ψ, non seulement pour les six groupes de cinq points que l'on peut former dans un système de six points, mais pour tous les groupes de cinq points que l'on peut former dans un nombre

illimité de points emplissant l'espace. Ce sera donc, dès lors, la véritable condition d'existence d'un système de géométrie.

Supposons que la relation ψ soit vérifiée pour tous les groupes de 5 points d'un système de n points, et démontrons que l'adjonction d'un $n+1^{e}$ point n'empêchera pas de déterminer tous les intervalles de manière à répondre à la même condition.

Soient A, B, C, 1, 2,... $(n-3)$, les n points donnés.

Prenons au hasard les intervalles du nouveau point $(n-2)$ aux points A, B, C; puis déterminons les intervalles

$$[1\,(n-2)],\quad [2\,(n-2)],\quad \ldots\ldots$$

par les relations

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{ABC1}\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{ABC2}\,(n-2)] &= 0,\\ &\vdots\\ [\mathrm{ABC}\,(n-3)\,(n-2)] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Il faut démontrer que l'on aura nécessairement :

$$[pqrs\,(n-2)] = 0,$$

p, q, r, s étant des nombres quelconques pris dans la suite 1, 2,... $(n-3)$, ou bien des lettres prises parmi A, B ou C.

Pour cela, considérons d'abord le système de 6 points

$$\mathrm{A, B, C}, p, q, n-2.$$

On a, dans ce système :

$(\mathrm{ABC}pq) = 0$ (puisque ce sont des points du système primitif),

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{ABC}p\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{ABC}q\,(n-2)] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad [\text{d'après les équations (3)}];$$

donc, en vertu de la condition des six points :

$$[\mathrm{AB}pq\,(n-2)] = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

et par une démonstration identique :

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{AB}pr\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{AB}qr\,(n-2)] &= 0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dans le système de 6 points A, B, p, q, r, $n-2$, on a donc aussi trois relations vérifiées (4 et 5), donc, toujours par la même condition, on a :

$$[\mathrm{A}pqr\,(n-2)] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et par une démonstration identique :

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{A}pqs\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{A}prs\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{A}qrs\,(n-2)] &= 0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Il en résulte que dans le système de 6 points A, p, q, r, s, $n-2$, trois relations et même quatre (6 et 7) sont vérifiées, donc les autres le sont aussi, et en particulier

$$[pqrs\,(n-2)] = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. La démonstration aurait été plus simple encore s'il avait fallu conserver une ou deux des lettres A, B, C.

La forme ψ qui répond à la condition des six points est donc complètement propre à la représentation d'un système de géométrie.

14. Il reste à découvrir cette forme ψ, telle que les équations

$$\psi\,[(12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45)] = 0,$$

$$\psi\,[(12)(13)(14)(16)(23)(24)(26)(34)(36)(46)] = 0,$$

$$\psi\,[(12)(13)(15)(16)(23)(25)(26)(35)(36)(56)] = 0,$$

entraînent nécessairement l'existence de ces trois autres équa-

tions :

$$\psi[(12)(14)(15)(16)(24)(25)(26)(45)(46)(56)] = 0,$$
$$\psi[(13)(14)(15)(16)(34)(35)(36)(45)(46)(56)] = 0,$$
$$\psi[(23)(24)(25)(26)(34)(35)(36)(45)(46)(56)] = 0.$$

Deux formes ψ satisfont à cette condition (pour les points 1, 2, 3, 4, 5). Ce sont les suivantes :

$$1^\circ : (12345) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) & \varphi(13) & \varphi(14) & \varphi(15) \\ 1 & \varphi(12) & 0 & \varphi(23) & \varphi(24) & \varphi(25) \\ 1 & \varphi(13) & \varphi(23) & 0 & \varphi(34) & \varphi(35) \\ 1 & \varphi(14) & \varphi(24) & \varphi(34) & 0 & \varphi(45) \\ 1 & \varphi(15) & \varphi(25) & \varphi(35) & \varphi(45) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)\ (*)$$

$$2^\circ : (12345) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(12) & \varphi(13) & \varphi(14) & \varphi(15) \\ \varphi(12) & 1 & \varphi(23) & \varphi(24) & \varphi(25) \\ \varphi(13) & \varphi(23) & 1 & \varphi(34) & \varphi(35) \\ \varphi(14) & \varphi(24) & \varphi(34) & 1 & \varphi(45) \\ \varphi(15) & \varphi(25) & \varphi(35) & \varphi(45) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)\ (**)$$

Ces déterminants diffèrent de ceux de MM. Cayley, Schering et Mansion par l'introduction de la forme arbitraire φ. Il est évident, en effet, que si l'une de ces expressions vérifie la condition des six points pour une certaine forme de φ, elle la vérifiera aussi pour toute autre forme de φ.

Le premier déterminant peut se déduire du second, moyennant une hypothèse particulière sur la forme φ et un passage

(*) CAYLEY, *The collected mathematical papers*, t. I, art. 1; *Journal de Cambridge*, t. II. — LAGRANGE, *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 1773 (*Sur les pyramides*); *Œuvres complètes*, t. III, p. 659. — CARNOT, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points...* — ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, 6e édition, 2e partie, Note I.

(**) SCHERING, *Nachrichten v. d. k. Gesellschaft d. Wissensch.*, Göttingen, 1870, Juli 13, p. 311; 1873, n° 2, p. 13; 1873, n° 6, p. 149. — MANSION, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIII, 1888-1889, 1re p., p. 57; t. XV, 1890-1891, 1re p., p. 8; t. XVI, 1891-1892, 1re p., p. 51.

à la limite, mais ici nous considérerons les deux solutions comme distinctes.

15. Il est assez facile de démontrer que ces deux formes analytiques vérifient la condition des six points (*); mais la réciproque peut être plus difficile, et il reste ici, dans la géométrie analytique générale, une lacune qu'il ne faut pas dissimuler.

On pourrait soutenir qu'en dehors des deux formes trouvées, il en existerait une troisième, distincte des deux autres, vérifiant également la condition des six points, et par conséquent capable d'exprimer la relation entre les 10 intervalles de 5 points de l'espace.

En attendant que cette question soit complètement résolue par l'analyse pure, nous montrerons plus loin que la découverte d'une nouvelle fonction, si elle était possible, ne conduirait pas à un nouveau système de géométrie, distinct de ceux qui résultent des deux fonctions déjà trouvées (**).

16. *Système géométrique ou analytique d'intervalles.* Nous avons vu, au n° 6, comment on pourrait imaginer un système idéal d'intervalles, sans relations entre eux. Lorsque les intervalles satisfont, au contraire, à l'une des relations du n° 14, nous dirons qu'ils constituent un système géométrique. Il est facile de former, d'une infinité de manières, un pareil système, comme nous l'avons déjà vu (n° 13). Je dis d'une infinité de manières, non seulement parce que la forme φ est arbitraire dans les relations (8) et (9), mais aussi parce que, pour chaque point que l'on ajoute au système, on peut prendre arbitrairement trois intervalles.

17. Nous allons maintenant étudier les propriétés des systèmes géométriques en prenant *comme exemple* celui des deux déterminants qui donne lieu aux calculs les plus simples; mais tout ce qui se fera pour celui-là pourra se répéter sur l'autre, ainsi que cela sera indiqué sommairement.

(*) Voir la Note II, due à M. Mansion.

(**) Voir la Note IV.

18. *Système de coordonnées.* Pour faire cette étude, il convient, conformément au titre de ce mémoire, d'introduire des coordonnées, destinées à simplifier les calculs, à les rendre symétriques et à les rapprocher de ceux de la géométrie analytique usuelle.

Tout le monde a dû se dire, en lisant un traité de géométrie analytique, que les calculs de cette science pourraient bien remplacer avantageusement certains raisonnements de la géométrie ordinaire, et peut-être supprimer des postulatums.

Malheureusement, le point de départ, c'est-à-dire la définition même des coordonnées et l'équation de la droite, s'appuyait sur la géométrie ordinaire, et il y avait donc cercle vicieux. La relation analytique (8), indépendante de l'expérience, que nous possédons entre les intervalles des points, va nous permettre d'arriver aux équations de la ligne droite, du plan, etc., et par suite de pousser jusqu'au bout la géométrie analytique, avec des coordonnées définies autrement que celles de la géométrie analytique ordinaire, mais qui, au fond, seront les mêmes.

19. Considérons les deux points 1 et 2, et rapportons-les à trois autres points de l'espace A, B, C, dont les intervalles sont AB, AC, BC.

A cet effet, adoptons d'abord comme coordonnées de A les quantités x_a, y_a, 0; de B, x_b, y_b, 0; de C, x_c, y_c, 0; les six quantités x_a, ... y_c satisfaisant aux trois équations

$$\left.\begin{aligned}(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 &= \rho\,(AB),\\ (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 &= \rho\,(AC),\\ (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 &= \rho\,(BC).\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Ces équations ne contiennent, en réalité, que quatre inconnues distinctes, c'est-à-dire les quatre différences figurant dans les deux premières équations.

Si l'on se donne au hasard l'une de ces différences, on calcule facilement les trois autres. Il y a plusieurs solutions, mais on choisira arbitrairement l'une d'entre elles. Ensuite, on pourra encore se donner arbitrairement deux des six coordon-

nées, comprenant l'un des x et l'un des y. Les quatre autres coordonnées se trouveront déterminées. Ces coordonnées peuvent, pour le moment, être réelles ou imaginaires.

Ceci posé, définissons les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point 1 par les équations

$$\left.\begin{aligned}(x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + z_1^2 &= \varphi(1A),\\ (x_1 - x_b)^2 + (y_1 - y_b)^2 + z_1^2 &= \varphi(1B),\\ (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + z_1^2 &= \varphi(1C).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Ces équations détermineront sans ambiguïté x_1 et y_1 ; mais z_1 aura deux valeurs égales et de signes contraires.

On pourra, en ce moment, conserver le double signe ; nous expliquerons plus loin comment le choix devra se faire. De même, les coordonnées x_2, y_2, z_2 du point 2 répondront aux équations

$$\left.\begin{aligned}(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 + z_2^2 &= \varphi(2A),\\ (x_2 - x_b)^2 + (y_2 - y_b)^2 + z_2^2 &= \varphi(2B),\\ (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 + z_2^2 &= \varphi(2C).\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

20. D'un autre côté, les cinq points 1, 2, A, B, C, donnent la relation :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) & \varphi(1A) & \varphi(1B) & \varphi(1C) \\ 1 & \varphi(12) & 0 & \varphi(2A) & \varphi(2B) & \varphi(2C) \\ 1 & \varphi(1A) & \varphi(2A) & 0 & \varphi(AB) & \varphi(AC) \\ 1 & \varphi(1B) & \varphi(2B) & \varphi(AB) & 0 & \varphi(BC) \\ 1 & \varphi(1C) & \varphi(2C) & \varphi(AC) & \varphi(BC) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (13)$$

Si, entre les dix équations (10), (11), (12) et (13), on élimine les neuf quantités (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), (2A), (2B), (2C), il restera la valeur de $\varphi(12)$ en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, et peut être aussi de $x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c$, car il n'est pas tout à fait évident, *a priori*, que ces quantités disparaissent par l'élimination.

Mais cette élimination est très facile à exécuter, car si, dans (13), on remplace tous les φ, autres que $\varphi(12)$, par leurs

valeurs tirées de (10), (11) et (12), il vient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) \\ 1 & \varphi(12) & 0 \\ 1 & (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_2^2 \\ 1 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_2^2 \\ 1 & (x_1-x_c)^2+(y_1-y_c)^2+z_1^2 & (x_2-x_c)^2+(y_2-y_c)^2+z_2^2 \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

équation dans laquelle $\varphi(12)$ est la seule inconnue.

11. Or, je dis qu'une première solution est donnée par l'équation

$$\varphi(12) = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \quad . \quad . \quad (15)$$

En effet, si l'on remplace $\varphi(12)$ par cette valeur, l'équation (14) devient une identité, parce que son premier membre est alors le produit des deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 1 & x_a^2+y_a^2 & x_a & y_a & 0 & 0 \\ 1 & x_b^2+y_b^2 & x_b & y_b & 0 & 0 \\ 1 & x_c^2+y_c^2 & x_c & y_c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 0 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & 1 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 & 0 \\ x_a^2+y_a^2 & 1 & -2x_a & -2y_a & 0 & 0 \\ x_b^2+y_b^2 & 1 & -2x_b & -2y_b & 0 & 0 \\ x_c^2+y_c^2 & 1 & -2x_c & -2y_c & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

lesquels sont nuls l'un et l'autre, puisqu'ils renferment une colonne à éléments nuls.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_1-x_c)^2+(y_1-y_c)^2+z_1^2 \\ (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_2^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_2^2 & (x_2-x_c)^2+(y_2-y_c)^2+z_2^2 \\ 0 & (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2 & (x_a-x_c)^2+(y_a-y_c)^2 \\ (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2 & 0 & (x_b-x_c)^2+(y_b-y_c)^2 \\ (x_a-x_c)^2+(y_a-y_c)^2 & (x_b-x_c)^2+(y_b-y_c)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

22. Une seconde solution sera évidemment

$$\varphi(12) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 \quad . \quad . \quad (16)$$

En effet on peut, dans (14), changer z_1 en $-z_1$ et z_2 en $-z_2$, soit simultanément, soit séparément, sans que l'équation se modifie. On peut donc faire la même chose dans le résultat. Le changement simultané ne donne rien, mais en changeant le signe de l'une des quantités z_1 ou z_2, on trouve cette seconde expression.

D'un autre côté, l'équation (14) n'est que du second degré en φ (12), donc il n'y a pas d'autre solution possible que (15) ou (16), et il en est de même pour deux points quelconques x_m, y_m, z_m; x_n, y_n, z_n.

N'oublions pas que les signes de z_1 et de z_2 sont restés douteux.

Nous choisirons celui de z_1 arbitrairement, puis ceux de $z_2, z_3, \ldots z_n$, de manière que l'on ait pour tous ces points la formule (15) et non la formule (16), quand on évalue φ (12), φ (13), ... φ ($1n$).

23. Il reste à prouver que, pour un autre intervalle quelconque, ne comprenant pas le point 1, par exemple (23), on aura aussi :

$$\varphi(23) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$

et non pas :

$$\varphi(23) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 + z_3)^2.$$

Pour cela, appliquons la formule (13) aux cinq points

1, 2, 3, A, B. Nous aurons :

$$(17)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \\ 1 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 & 0 \\ 1 & (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_2^2 \\ 1 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_2^2 \\ 1 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 & \varphi(23) \end{vmatrix}$$

On voit que $\varphi(23) = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2$ satisfait à l'équation, comme cela devait être ; mais il n'est plus vrai ici que l'on puisse remplacer z_3 par $-z_3$; cela ne changerait pas le terme en z_3^2, mais bien le terme $(z_1-z_3)^2$. Toutefois, ce n'est là qu'une cause de doute et non une preuve de l'inexactitude du résultat $(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2+z_3)^2$.

Il ne suffirait pas même de prouver que $(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2+z_3)^2$ n'est pas ici la seconde racine algébrique de l'équation. Il faut que, même accidentellement, ou pour certains points, la seconde racine ne puisse pas être numériquement égale à cette quantité, sans quoi le doute subsisterait.

La solution complète de cette difficulté sera donnée dans la Note I, et il en résultera que l'expression

$$\varphi(mn) = (x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2+(z_m-z_n)^2$$

est toujours exacte et conduit à la valeur de l'intervalle (mn), dans tous les systèmes géométriques répondant au premier déterminant. Il faut remarquer que cette formule est tout à fait générale, parce qu'elle contient, comme cas particuliers, les formules (10), (11) et (12).

24. *Ligne droite.* — C'est la ligne, ou la suite de points du système, telle que si l'on en considère trois points, aucun

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 \\ (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_2^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_2^2 & \varphi(23) \\ 0 & (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2 & (x_a-x_3)^2+(y_a-y_3)^2+z_3^2 \\ (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2 & 0 & (x_b-x_3)^2+(y_b-y_3)^2+z_3^2 \\ (x_a-x_3)^2+(y_a-y_3)^2+z_3^2 & (x_b-x_3)^2+(y_b-y_3)^2+z_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

autre point du système ne peut être distant de deux de ces points comme l'est le troisième (*).

Soient x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 les deux points donnés. La ligne dont tous les points répondent, par leurs coordonnées x, y, z, aux équations du premier degré

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z - z_1), \\ y - y_1 &= \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z - z_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

sera une ligne droite.

Pour le démontrer, prenons un point quelconque, x_3, y_3, z_3, sur cette ligne, et supposons qu'un autre point du système, x_4, y_4, z_4, puisse être distant de x_1, y_1, z_1 et de x_2, y_2, z_2 comme l'est x_3, y_3, z_3. On aurait, en même temps que les équations (18), appliquées au point x_3, y_3, z_3, les deux autres équations :

$$\left.\begin{aligned} (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2 &= (x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2+(z_4-z_1)^2 \\ (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2 &= (x_4-x_2)^2+(y_4-y_2)^2+(z_4-z_2)^2 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

(*) Ceci est la traduction analytique de cet énoncé géométrique basé sur l'idée du mouvement : La droite est la ligne telle que si l'on immobilise deux de ses points, tous les autres sont immobilisés par cela seul.

Or les équations (18) et (19) ne peuvent donner, comme on le vérifie aisément, d'autres solutions réelles que $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3$, $z_4 = z_3$, et nous écarterons bientôt (n^{os} 28 et 29) les coordonnées imaginaires.

Il est facile de voir, au contraire, que si les coordonnées x_3, y_3, z_3 ne vérifient pas les équations (18), les équations (19) pourront toujours subsister sans entraîner les conditions $x_3 = x_4$, $y_3 = y_4$, $z_3 = z_4$.

Ainsi les équations (18) représentent bien une ligne droite, et cela dans tous les systèmes correspondant au premier déterminant, quel que soit φ.

25. *Longueur de la ligne droite entre deux points.* — Nous définirons cette longueur comme étant l'intégrale de l'intervalle élémentaire entre deux points, lorsque z varie d'une manière continue, et le calcul nous montrera que cette longueur est déterminée.

On a :

$$\varphi(ds) = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ou :

$$\sqrt{\varphi(ds)} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

L'intégrale de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ entre x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2, lorsque les coordonnées restent soumises aux relations (18), est, analytiquement :

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

On a donc :

$$\left[\int \sqrt{\varphi(ds)}\right]_1^2 = \sqrt{\varphi(12)}.$$

Pour la forme particulière $\varphi(x) = kx^2$, il vient

$$[s]_1^2 = (12),$$

c'est-à-dire qu'alors, mais alors seulement, la longueur totale

de la ligne droite coïncide avec l'intervalle entre les deux extrémités, et, par suite, le long d'une pareille ligne, les intervalles s'ajoutent.

Pour toutes les autres formes de φ, cette propriété n'existerait pas, et c'est là ce qui exclut ces formes et laisse uniquement subsister le déterminant (8), avec $\varphi(x) = kx^2$, ou bien encore, en multipliant la première ligne par k et divisant les cinq dernières colonnes par k, on retrouve simplement le déterminant, tel qu'il a été donné par Cayley.

26. Si deux des cinq points viennent à coïncider, par exemple 1 avec 2, la valeur de $\varphi(12)$, ou $k(12)^2$, et par conséquent aussi la valeur de (12) devient 0, et l'intervalle entre deux points qui coïncident est nul, propriété qui aurait pu être rangée parmi les conventions préliminaires. On pourrait aussi considérer comme une convention de ne jamais attribuer la valeur 0 à l'intervalle de deux points qui ne coïncident pas. Nous y reviendrons bientôt.

27. Mais ici se place une observation très importante et une *troisième* condition à remplir par notre système de géométrie.

Nous en avons, en effet, découvert déjà deux.

L'une, que l'on peut appeler la condition d'*homogénéité*, est remplie par le choix de la fonction ψ, exprimant la relation entre les dix intervalles de cinq points quelconques, pris n'importe où. Elle est indispensable pour l'existence d'un système géométrique d'intervalles des points de l'espace.

La seconde, que l'on peut appeler la condition de *mesure*, est remplie par le choix de la fonction φ, exprimant que le long d'une ligne droite les intervalles s'ajoutent.

Cette condition n'est pas absolue. Si l'on commençait l'étude d'un système de géométrie avec une fonction φ quelconque, on s'apercevrait que le long de la ligne droite, ce ne sont pas les intervalles (tels qu'ils ont été primitivement réglés) qui s'ajoutent, mais bien des fonctions de ces intervalles. On

pourrait admettre cette convention, ou bien, si on le voulait, il serait encore temps de corriger la fonction φ, de manière à remplir la condition de mesure des droites, comme elle est remplie dans la géométrie usuelle.

La troisième condition peut s'appeler la condition de *continuité* géométrique. Elle est encore moins indispensable que la seconde, puisque nous avons réussi à nous en passer jusqu'à présent, mais il importe de la définir nettement (*).

28. Nous avons vu au n° 19 que tout point de l'espace (tel que 1) a été déterminé d'abord par les trois intervalles qui le séparent respectivement des points fondamentaux A, B, C. On peut, uniquement pour simplifier, et pour écarter des idées inutiles, supposer que ces trois intervalles, ainsi que les intervalles (AB), (AC), (BC) eux-mêmes, soient des nombres réels.

Mais de là ne résulte pas encore que les coordonnées x_1, y_1, z_1, du point 1, soient aussi des nombres réels, même après avoir particularisé la fonction φ et admis la forme $\varphi(x) = kx^2$.

La résolution des équations donne à cet effet les conditions suivantes : il faut que, dans chacun des quatre systèmes de trois points que l'on peut former avec les quatre points A, B, C, 1, un intervalle quelconque soit plus petit que la somme des deux autres, et en outre il doit exister, entre les intervalles donnés, une inégalité supplémentaire (**).

Si donc on veut déterminer les points par des coordonnées réelles, il faut limiter le choix arbitraire des intervalles (AB), (AC), (BC), (A1), (B1), (C1), etc., de manière que ces conditions soient remplies.

Réciproquement, si les coordonnées x_a, y_a; x_b, y_b; x_c, y_c; x_1, y_1, z_1 sont réelles, il n'y a pas de doute sur la réalité des

(*) On pourrait croire que nous avons déjà supposé la continuité au n° 25, lorsque nous avons cherché la longueur de la ligne droite; mais il ne s'agissait là que de continuité analytique.

La longueur est définie par l'intégrale de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, sans que l'on suppose l'existence géométrique des points; les intervalles s'ajoutent analytiquement pour toutes les valeurs de x, y, z, répondant aux équations; ils s'ajoutent géométriquement là où les points existent.

(**) Voir, à ce sujet, la Note V, due à M. Goedseels.

valeurs des intervalles (1A), (1B), (1C); mais il ne s'ensuit pas encore que le point 1 existe dans l'espace. Puisque tous les intervalles relatifs à A, B, C ont été choisis arbitrairement, rien ne prouve que le groupe (1A, 1B, 1C), calculé au moyen des neuf coordonnées ci-dessus, en fasse partie.

29. C'est ici qu'intervient la condition géométrique de continuité. Elle vient restreindre le choix, jusqu'à présent arbitraire, de ces intervalles. Il faut que tout groupe (1A, 1B, 1C) résultant de la substitution dans (11) de valeurs réelles quelconques pour x_1, y_1, z_1; en d'autres termes, tout groupe satisfaisant aux conditions du n° 28, existe réellement pour un certain point 1 de l'espace.

De plus, il convient que le groupe (1A, 1B, 1C) ne réponde qu'à un seul point de l'espace. S'il n'en était pas ainsi, deux points 1 et 2 pourraient avoir les mêmes coordonnées, le même intervalle par rapport à un troisième point quelconque, et un intervalle nul entre eux. Cela n'a rien de contradictoire analytiquement, mais il convient d'écarter cette hypothèse, comme contraire à la notion de continuité, afin de pouvoir dire que trois coordonnées réelles quelconques, x_1, y_1, z_1, déterminent un et un seul point de l'espace.

Sauf ces restrictions, les intervalles (1A), (1B), (1C); (2A), (2B), (2C); ... peuvent être pris au hasard; tous les autres intervalles en résultent, et la géométrie qui les concerne est la même que la géométrie usuelle (*).

(*) Les intervalles aux points A, B et C pourraient être déterminés, par exemple, par trois séries de surfaces fermées enveloppant ces points, dont chacune envelopperait celle qui précède dans la même série, et sur chacune desquelles l'intervalle au point central serait supposé constant. Ces surfaces, bien que n'étant pas des sphères, seraient construites de manière à se couper dans les mêmes cas que si elles étaient des sphères. Les coordonnées des points et leurs intervalles entre eux s'obtiendraient alors par les équations (11) et (15), et les formules de cette géométrie seraient les mêmes que celles de la géométrie usuelle. On pourrait aussi faire servir le même procédé à la représentation matérielle des deux autres systèmes de géométrie, dont les formules vont suivre.

D'ailleurs, la condition de continuité vient compléter celle de l'homogénéité. En effet, l'homogénéité ne résulte pas uniquement des propriétés de la fonction ψ, mais en outre de la propriété de la ligne droite d'être indéfinie en longueur, d'où il résulte que tout intervalle porté sur une certaine droite peut aussi être porté sur toute autre droite.

Enfin il faut remarquer encore qu'en vertu de la formule générale (15) et de ce qui vient d'être dit dans ce n° 29, on ne saurait admettre des coordonnées imaginaires, sans être obligé d'admettre aussi des intervalles imaginaires, ce que nous voulons exclure.

30. Tout système de deux équations du premier degré représente une ligne droite.

Par deux points, on peut mener une ligne droite et une seule.

A partir d'un point d'une droite, on peut trouver, sur cette droite, deux points, mais deux seulement, distants du premier d'un intervalle donné, ce qui exclut les bifurcations.

La ligne droite est un espace à une dimension.

31. *Plan.* — Le plan est le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une équation du premier degré.

Toute droite qui a deux points dans un plan s'y trouve tout entière.

Par deux droites qui se rencontrent, par une droite et un point extérieur, par trois points non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul.

Le plan peut être engendré tout entier par une droite passant par un point donné et s'appuyant toujours sur une droite donnée.

Le plan est un espace à deux dimensions.

32. Étant donnés un point $A(x_1, y_1, z_1)$; une droite $B(x = az + b,\ y = cz + d)$ et un plan C contenant le point A et la droite B, toutes les droites menées par le point A, dans

le plan C, excepté celle qui a pour équations

$$x - x_1 = a(z - z_1),$$
$$y - y_1 = c(z - z_1),$$

rencontrent la droite B. Principe de la parallèle unique.

33. Nous nous trouvons maintenant en possession de tous les principes que l'on admet au début de la géométrie, mais qui, dans cette science, ont une origine expérimentale; et nous pouvons continuer sans rencontrer de nouvel obstacle, soit par la méthode analytique, soit par la synthèse des traités de géométrie ordinaires.

34. *Étude du second déterminant.* — L'étude du second déterminant peut maintenant se faire en suivant pas à pas les calculs établis ci-dessus pour le premier. Nous en présenterons les résultats avec moins de détails.

Considérons deux points 1 et 2, et rapportons-les à trois autres points de l'espace A, B, C, dont les intervalles sont (AB), (AC), (BC).

A cet effet, adoptons d'abord, comme coordonnées de A, des quantités x_a, y_a, 0; de B, x_b, y_b, 0; de C, x_c, y_c, 0; les six quantités x_a, ... y_c satisfaisant aux trois équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{(1 \pm x_a x_b \pm y_a y_b)^2}{(1 \pm x_a^2 \pm y_a^2)(1 \pm x_b^2 \pm y_b^2)} &= \varphi^2(AB), \\
\frac{(1 \pm x_a x_c \pm y_a y_c)^2}{(1 \pm x_a^2 \pm y_a^2)(1 \pm x_c^2 \pm y_c^2)} &= \varphi^2(AC), \\
\frac{(1 \pm x_b x_c \pm y_b y_c)^2}{(1 \pm x_b^2 \pm y_b^2)(1 \pm x_c^2 \pm y_c^2)} &= \varphi^2(BC). \quad (*)
\end{aligned}\right\}. \qquad (20)$$

(*) Les doubles signes ont pour objet, comme on le comprendra bientôt, d'éviter l'emploi de coordonnées imaginaires. On peut, pour le moment, prendre tous les signes supérieurs, ou tous les signes inférieurs. La distinction sera établie plus loin.

Cela posé, déterminons les coordonnées x_1, y_1, z_1, du point 1 par les équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{(1 \pm x_1x_a \pm y_1y_a)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_a^2 \pm y_a^2)} &= \rho^2(1A),\\
\frac{(1 \pm x_1x_b \pm y_1y_b)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_b^2 \pm y_b^2)} &= \rho^2(1B),\\
\frac{(1 \pm x_1x_c \pm y_1y_c)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_c^2 \pm y_c^2)} &= \rho^2(1C).
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

On aura, pour le point 2, trois équations analogues, puis la relation donnée par le déterminant (9). Si, entre ces dix équations, on élimine les neuf quantités (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), (2A), (2B), (2C), on trouvera :

$$\rho^2(12) = \frac{(1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)}. \quad (22)$$

Toutefois on ne peut plus dire ici, comme au n° 20, que l'élimination soit très facile. On verra, dans la Note III, comment M. Mansion l'a exécutée, par l'introduction de coordonnées auxiliaires.

Il faut remarquer, comme au n° 23, que la formule (22) contient, comme cas particuliers, les formules (20) et (21).

35. *Ligne droite.* — Elle se définit comme dans l'autre système de géométrie, et a les mêmes équations :

$$\left.\begin{aligned}
x - x_1 &= \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z - z_1),\\
y - y_1 &= \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z - z_1),
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

parce que, moyennant l'existence de ces équations, appliquées au point x_3, y_3, z_3, les deux relations

$$\frac{(1 \pm x_1x_3 \pm y_1y_3 \pm z_1z_3)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)\,(1 \pm x_3^2 \pm y_3^2 \pm z_3^2)} = \frac{(1 \pm x_1x_4 \pm y_1y_4 \pm z_1z_4)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)\,(1 \pm x_4^2 \pm y_4^2 \pm z_4^2)}$$

et

$$\frac{(1 \pm x_2x_3 \pm y_2y_3 \pm z_2z_3)^2}{(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)\,(1 \pm x_3^2 \pm y_3^2 \pm z_3^2)} = \frac{(1 \pm x_2x_4 \pm y_2y_4 \pm z_2z_4)^2}{(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)\,(1 \pm x_4^2 \pm y_4^2 \pm z_4^2)}$$

entraînent les égalités $x_3 = x_4, y_3 = y_4, z_3 = z_4$.

26. *Longueur de la ligne droite entre deux points.* — En remplaçant $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, respectivement par $x, y, z, x + dx, y + dy, z + dz$, dans (22), on trouve :

$$\varphi^2(ds) = 1 - \frac{dx^2(1 \pm y^2 \pm z^2) + dy^2(1 \pm x^2 \pm z^2) + dz^2(1 \pm x^2 \pm y^2) \mp 2xydxdy \mp 2xzdxdz \mp 2yzdydz}{(1 \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2)^2},$$

$$\sqrt{\pm[1 - \varphi^2(ds)]} = \frac{\sqrt{dx^2(1 \pm y^2 \pm z^2) + dy^2(1 \pm x^2 \pm z^2) + dz^2(1 \pm x^2 \pm y^2) \mp 2xydxdy \mp 2xzdxdz \mp 2yzdydz}}{1 \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2}.$$

L'intégrale du second membre, entre x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2, lorsque les coordonnées courantes x, y, z

restent soumises aux équations (23), est analytiquement :

$$\arccos \frac{1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2}{\sqrt{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)}}. \quad (*)$$

On a donc :

$$\left[\int \sqrt{1 - \varphi'^2(ds)}\right]_1^2 = \arccos \varphi\,(12).$$

Pour la forme particulière $\varphi(x) = \cos kx$, il vient :

$$[s]_1^2 = (12),$$

c'est-à-dire qu'alors, mais alors seulement, la longueur totale de la ligne droite coïncide avec l'intervalle entre les deux extrémités, et tout se passe comme dans la géométrie ordinaire, résultant du premier déterminant (**).

27. Toutefois, la constante k ne joue pas ici le même rôle. Dans la géométrie ordinaire, on avait trouvé

$$\varphi\,(x) = kx^2,$$

et alors, que la constante fût réelle ou imaginaire, elle disparaissait dans le déterminant. Il n'en est pas de même ici, et à partir de ce moment il faut distinguer deux cas :

28. 1° k imaginaire. Nous ne supposerons pas que cette constante soit une imaginaire complète, de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, car alors il deviendrait impossible de rendre réelles les valeurs des intervalles entre les points. On aurait une géométrie absolument imaginaire, et nous exclurons ce cas. Nous remplacerons donc simplement k par $k'\sqrt{-1}$, ou cos kx par cos $k'x\sqrt{-1}$, ou encore par ch $k'x$, k' étant maintenant réel.

Les conditions d'homogénéité et de mesure sont remplies. Étudions celle de la continuité. (AB), (AC), (BC) seront choisis

(*) Il est à peine utile de faire observer que les expressions *cos* et *arc cos* n'ont ici qu'un sens purement analytique.

(**) Voir, au sujet des propriétés de la ligne droite, la Note VI.

réels, ainsi que les intervalles des points 1, 2, ... aux points A, B, C ; et de plus tous ces intervalles doivent être choisis tels que x_a, y_a ; x_b, y_b ; x_c, y_c ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; ... soient réels.

Les conditions relatives au choix de (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), ... seront analogues à celles de la géométrie usuelle.

30. Mais ici ces conditions en entraîneront d'autres.

En effet, $\varphi(AB)$, ayant pour valeur ch $k'(AB)$, doit être plus grand que 1, ce qui serait impossible si l'on adoptait les signes supérieurs. Nous prendrons donc les signes inférieurs.

Nous remarquerons encore que les six quantités $x_a, \ldots y_c$ ne sont pas complètement déterminées par les trois équations (20), et nous ajouterons la seule condition que $x_a^2 + y_a^2$ soit donnée égale à une quantité moindre que l'unité, parce que cette hypothèse, d'ailleurs permise, simplifiera tout ce qui suit. Il suffit, en effet, de jeter un coup d'œil sur les équations pour voir qu'alors les quantités

$$1 - x_a^2 - y_a^2,$$
$$1 - x_b^2 - y_b^2,$$
$$1 - x_c^2 - y_c^2,$$
$$1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2,$$
$$1 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2,$$
$$\vdots$$

sont toutes positives.

Réciproquement, si les coordonnées x_a, y_a ; x_b, y_b ; x_c, y_c ; x_1, y_1, z_1 ; ... sont réelles et satisfont à la condition de limite de grandeur que nous venons d'indiquer, les intervalles (1A), (1B,) (1C), ... seront réels; mais il faudra, de plus, limiter le choix des intervalles de manière qu'à ces systèmes de coordonnées réponde chaque fois un et un seul point de l'espace.

Les équations (21) déterminent complètement x_1 et y_1, mais donnent pour z_1 deux valeurs égales et de signes contraires. Le signe de z se déterminera comme dans le premier système de géométrie.

40. Nous pourrons maintenant répéter tout ce que nous avons dit dans le système de géométrie précédent, sauf une seule modification importante.

Tout système de deux équations du premier degré représente une ligne droite, si toutefois ces équations peuvent être vérifiées par des coordonnées répondant aux conditions ci-dessus.

Par deux points, on peut mener une ligne droite et une seule.

A partir d'un point d'une droite, on peut trouver, sur cette droite, deux points, mais deux seulement, distants du premier d'un intervalle donné, ce qui exclut les bifurcations.

Le plan est le lieu des points dont les coordonnées x, y, z satisfont à une équation du premier degré.

Toute droite qui a deux points dans un plan s'y trouve tout entière.

Par deux droites qui se rencontrent, par une droite et un point extérieur, par trois points non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul.

Le plan peut être engendré par une droite passant par un point donné et s'appuyant toujours sur une droite donnée ; mais on n'obtient pas ainsi le plan tout entier, comme on le verra au numéro suivant.

41. Donnons-nous, comme au n° 32, un point A (x_1, y_1, z_1), une droite B $(x = az + b, y = cz + d)$ et un plan C contenant le point A et la droite B ; puis cherchons l'intersection, avec la droite B, d'une droite quelconque menée par le point A dans le plan C.

Les calculs seront les mêmes que dans la géométrie analytique ordinaire, et l'on trouvera trois coordonnées réelles, x_2, y_2, z_2, qui ne deviendront infinies que pour la droite

$$x - x_1 = a(z - z_1),$$
$$y - y_1 = c(z - z_1).$$

Mais ici, contrairement à la géométrie ordinaire, il ne suffit

pas que x_2, y_2 et z_2 soient réelles et finies pour déterminer un point de l'espace. Il faut, de plus, que l'on ait :

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 < 1.$$

Si la droite menée par le point A, dans le plan C, a, pour l'une de ses équations

$$x - x_1 = \alpha(z - z_1)$$

et si l'on cherche à donner à la somme $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ sa valeur-limite, égale à l'unité, on trouvera pour α deux valeurs réelles inégales, satisfaisant à cette condition, et pour ces deux valeurs l'intervalle entre le point 2 et tout point déterminé de la droite B est infini.

Ainsi donc, par un point on peut mener deux parallèles ou asymptotes à une droite donnée, une de chaque côté.

Toutes les droites comprises dans le plan de ces deux parallèles, et dans deux des angles qu'elles forment, sont aussi des parallèles, en ce sens qu'elles ne rencontrent pas la droite donnée, mais elles s'en écartent de plus en plus.

On voit que, sauf en ce qui concerne le parallélisme, la ligne droite jouit des mêmes propriétés que dans la géométrie ordinaire.

Ces systèmes de géométrie, en nombre infini, mais ne différant entre eux que par la valeur du paramètre k', sont les géométries pseudo-sphériques, ou simplement abstraites, exposées en premier lieu par Lobatschewsky et Bolyai. Gauss paraît en avoir eu connaissance antérieurement à leurs écrits, et les premiers principes de cette géométrie ont été indiqués (mais en les considérant comme faux) par le P. Saccheri, dans un ouvrage daté de 1733. Quand on prend $k' = 0$, on rentre dans la géométrie ordinaire.

43. 2° Soit maintenant k réel, dans $\varphi(x) = \cos kx$. On peut aussi, évidemment, le supposer positif. Nous définirons nos

coordonnées en adoptant les signes supérieurs, ce qui rend tous les cosinus inférieurs à l'unité, comme cela doit être.

Les conditions de réalité sont toujours analogues à celles des deux autres systèmes de géométrie; mais ici, conformément au premier système (et contrairement au second), les coordonnées pourront varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Il n'en sera pas ainsi des intervalles eux-mêmes, comme nous allons le voir.

D'abord, les intervalles tels que δ n'entrant dans aucune formule autrement que par la fonction cos $k\delta$, qui est périodique, on est tenté de croire que ces intervalles puissent être augmentés ou diminués à volonté d'un multiple quelconque de $\frac{2\pi}{k}$ (avec ou sans changement de signe); mais nous avons renoncé à cette faculté, par la manière dont nous avons opéré l'intégration au n° 36. L'arc cos qui entre dans l'intégrale représente un arc compris entre 0 et π, et comme cet arc se réduit finalement à $k(12)$, on voit que la valeur maximum de (12) est $\frac{\pi}{k}$.

Ainsi, dans ce système de géométrie, l'intervalle de deux points ne peut jamais dépasser $\frac{\pi}{k}$; et si, parmi les intervalles δ choisis arbitrairement, il y en avait de plus grands, il faudrait, pour satisfaire à ce que nous avons appelé la condition de mesure, les ramener entre 0 et $\frac{\pi}{k}$, sans changer le cosinus de $k\delta$.

43. Nous rencontrons donc ici une complication qui ne se présentait dans aucun des systèmes antérieurs.

Il en est une seconde, consistant en ce que la formule

$$\cos^2 k(12) = \frac{(1 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} \qquad (24)$$

ne détermine pas complètement la valeur de (12), contrairement à ce qui arrivait pour $k(12)^2$ et pour $\mathrm{ch}^2 k(12)$, dans les deux systèmes antérieurs.

Si l'on exécutait un calcul numérique, le doute disparaî-

trait : la valeur à conserver pour le cosinus serait l'unique racine commune à l'équation (24) et à celle qui provient du déterminant (9); mais *a priori* il paraît difficile de prévoir si le cosinus aura le signe + ou le signe —.

S'il était prouvé qu'il fallût toujours prendre le signe +, il en résulterait que l'intervalle de deux points, non seulement ne pourrait dépasser $\frac{\pi}{k}$, comme cela est déjà démontré, mais ne pourrait dépasser $\frac{\pi}{2k}$.

Des géomètres de grand mérite (*) ont traité cette troisième espèce de géométrie en assignant à l'intervalle de deux points le maximum $\frac{\pi}{2k}$; d'autres (**) ont adopté le maximum $\frac{\pi}{k}$; d'autres enfin (***) ne se prononcent pas entre les deux solutions.

Dans mon *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, j'ai admis comme seul maximum possible $\frac{\pi}{k}$ (avec d'autres notations); mais j'en ai donné des raisons géométriques; et j'admets que dans une exposition encore plus abstraite que la mienne, on puisse soutenir la thèse opposée.

Après examen nouveau, je maintiens ma manière de voir, et je vais en donner la raison.

44. D'abord, en supposant que le point 2, parti du point 1, se meuve sur la droite 12 d'une manière continue, on voit bien que la fonction cos k (12), partie de la valeur 1, ne peut avoir aucun minimum entre 1 et 0; 0 lui-même ne peut être un minimum que si l'on rejette les valeurs négatives; et si on ne les rejette pas, on ne trouve pas d'autre minimum que — 1. Ainsi il n'y a que deux minimums possibles : 0 ou —1, et par conséquent deux maximums possibles pour l'intervalle : $\frac{\pi}{2k}$ ou $\frac{\pi}{k}$.

(*) KLEIN, *Mathematische Annalen*, VI, p. 125; VII, p. 549; IX, p. 476.

(**) FRISCHAUF, *Elemente der absoluten Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1876.

(***) NEWCOMB, *Journal de Crelle*, 1877, LXXXIII, p. 293.

Pourrait-on établir une géométrie où existerait le premier de ces maximums? On le peut artificiellement, non seulement pour $\frac{\pi}{2k}$, mais même pour tout maximum inférieur, aussi petit que l'on voudra. En effet, les intervalles pouvant être pris arbitrairement, rien n'empêche d'assigner à ceux qui séparent les points 1, 2, 3, ... des points fondamentaux A, B, C, des valeurs moindres que la moitié du maximum dont il s'agit. Dès lors, tous les intervalles calculés (12), ... devant être moindres que (1A) + (2A), ..., seraient effectivement inférieurs au maximum supposé.

Mais je répète que ce serait là une création artificielle, parce que, dans la géométrie ainsi construite, la loi d'homogénéité de l'espace ne se vérifierait pas. Cette loi exige, en effet, que l'on puisse, sur une droite quelconque, à partir d'un point quelconque, porter tous les intervalles inférieurs au maximum et qu'alors tout intervalle calculé au moyen des précédents se trouve aussi inférieur à ce maximum. Or, cette condition est analytiquement irréalisable pour tout maximum inférieur à $\frac{\pi}{k}$. Nous allons le faire voir nettement pour le prétendu maximum $\frac{\pi}{2k}$.

Il faut s'occuper, en premier lieu, du signe des radicaux qui figureront aux dénominateurs des cosinus des intervalles, lorsque, pour obtenir le numérateur, on se borne à supprimer l'exposant 2 dans les formules (20), (21) et (22).

On voit d'abord que dans les formules (21), les trois radicaux peuvent être pris de même signe; cette hypothèse suffit pour déterminer entièrement les valeurs de x_1, y_1 et z_1^2, et dès lors le signe du radical se trouve aussi déterminé. Il en est de même pour le point 2.

On verra de plus, dans la Note III, que si les six radicaux de 1 et 2 sont tous positifs ou tous négatifs, le radical de (12) est positif, tandis que si trois radicaux sont positifs et les trois autres négatifs, le radical de (12) est négatif.

Supposons maintenant que nous déterminions *a priori* les douze quantités x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, de

manière que les neuf numérateurs

$$\begin{array}{l} 1 + x_a x_b + y_a y_b \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 + x_1 x_a + y_1 y_a, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 + x_2 x_a + y_2 y_a, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

soient tous positifs, mais que le numérateur

$$1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

soit négatif.

Il suffit pour cela de prendre

x_1 et y_1 très grands et positifs,
x_2 et y_2 très grands et négatifs,

et toutes les autres quantités positives et très petites, suffisamment petites pour que les termes $x_1 x_2 + y_1 y_2$ soient prépondérants dans le dernier numérateur et le terme 1 dans tous les autres.

Prenons ensuite positivement les neuf radicaux de (20) et (21). On trouvera donc, pour les cosinus relatifs à (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), (2A), (2B), (2C), des valeurs positives, c'est-à-dire que tous ces intervalles seront inférieurs à $\frac{\pi}{2k}$.

Réciproquement, si l'on s'était donné *a priori* lesdits intervalles, ainsi que les valeurs de x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, on n'aurait pas pu trouver d'autres valeurs que les précédentes pour x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, sauf toutefois les signes de z_1 et de z_2, lesquels n'ont pas d'importance, puisque nous avons eu soin de rendre prépondérante, dans (22), la somme $x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Les radicaux de (20) et (21) étant positifs, celui de (22) l'est

aussi, et comme le numérateur est négatif, le cosinus de $k(12)$ est négatif, et l'intervalle (12) est forcément plus grand que $\frac{\pi}{2k}$, ce qui montre l'impossibilité de l'hypothèse.

La même impossibilité n'existe pas quand on prend le maximum égal à $\frac{\pi}{k}$. Dans cette nouvelle hypothèse, la valeur-limite de cos $k(12)$ est -1, ce qui ne peut arriver que pour $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$. On est donc obligé alors de renoncer à représenter par trois coordonnées un point unique de l'espace; tout système de trois coordonnées représente deux points, distants entre eux du maximum $\frac{\pi}{k}$ et que nous appellerons *opposés*. La formule $\cos^2 k(12)$, considérée isolément, et abstraction faite des relations des points 1 et 2 avec d'autres points, donne deux cosinus positifs et deux négatifs, correspondant à quatre intervalles : deux plus petits que $\frac{\pi}{2k}$ et deux plus grands.

45. Je répéterai ici que je ne conteste nullement la possibilité d'établir des théories plus abstraites que les miennes; mais dans mes conceptions, qui restent toujours réelles et matériellement réalisables, il n'y a que trois systèmes de géométrie possibles : celui d'Euclide, celui de Lobatschewsky et celui dont je traite en ce moment (mais avec l'intervalle maximum $\frac{\pi}{k}$ et non $\frac{\pi}{2k}$), et qui paraît avoir été considéré en premier lieu par Riemann.

46. Dans cette dernière géométrie, toute droite, tout plan, toute ligne ou toute surface ayant des équations déterminées (et assujettie à contenir tous les points dont les coordonnées satisfont à ces équations), contient nécessairement les opposés de tous ses points.

La ligne droite se ferme donc comme les grands cercles de la sphère, et toutes les propriétés relatives à deux points d'une droite subissent une exception quand ces deux points sont des pôles opposés.

Deux droites quelconques se coupent donc en deux points opposés, et le parallélisme est impossible.

Cette géométrie a reçu le nom de géométrie sphérique, ou doublement abstraite.

Quand on prend $k = 0$, on rentre dans la géométrie ordinaire.

47. *Géométrie expérimentale.* — Jusqu'à présent, dans tous les systèmes que nous avons considérés, même les systèmes analytiques ou géométriques, il y avait un certain nombre d'intervalles arbitraires.

Dans la nature, il n'y a rien d'arbitraire, et les intervalles des points s'y mesurent par comparaison, au moyen de la notion expérimentale des corps solides (règles, compas, etc.).

Cependant si l'on veut rapprocher, autant que possible, la géométrie expérimentale des géométries purement théoriques que nous venons d'exposer, il ne faut pas supposer que l'on ait mesuré ainsi *tous* les intervalles, mais seulement le nombre strictement nécessaire.

Il en sera donc ici comme dans les systèmes appelés géométriques ou analytiques. A chaque point nouveau que l'on introduit, les trois intervalles qui étaient arbitraires deviennent des intervalles mesurés expérimentalement, et tous les autres sont des intervalles calculés au moyen de l'une quelconque des formules (8) ou (9).

La géométrie reste donc absolument vraie, quant à ses formules, et non approximative. Mais il y aura lieu d'examiner si les intervalles calculés sont d'accord avec les mesures expérimentales que l'on aurait pu en prendre directement. Celle des formules (8) ou (9) qui réalisera le mieux cet accord sera la véritable formule de la géométrie expérimentale ou physique.

48. Rigoureusement parlant, il ne serait pas nécessaire de considérer un système complet de points, ou l'espace tout entier, pour arriver à ce résultat. Si, comme nous l'avons supposé, l'espace est homogène, c'est-à-dire que les mêmes formules sont applicables à toutes ses parties, il suffirait d'un système de cinq points, dont les dix intervalles seraient mesurés expérimentalement avec une approximation indéfinie,

pour décider laquelle des formules (8) ou (9) reproduit exactement ce résultat.

Et il faut bien que l'une de ces formules y satisfasse, sans quoi il n'existerait point de géométrie physique, aucune autre relation n'étant analytiquement possible sans contradiction, à moins que notre espace ne soit pas à trois dimensions, hypothèse que l'expérience démentirait plus complètement encore.

49. Un autre critérium de la véritable géométrie à adopter peut consister dans la forme de la ligne droite. Chaque système essayé donnera pour cette ligne une forme différente, et l'on doit choisir celle qui se rapprochera le plus de la droite physique, c'est-à-dire d'une arête faisant partie d'un corps solide et qui reste immobile quand on en fixe deux points.

50. Bien que les deux derniers procédés de recherche paraissent simples, ils sont peu pratiques, et dans la réalité c'est le premier qui a été employé, c'est-à-dire *la concordance entre les intervalles calculés et leur mesure expérimentale.*

L'expérience s'est prononcée à cet égard d'une manière complète. Les hommes n'ont jamais employé que la géométrie répondant à la formule (8), et ils n'ont jamais trouvé de contradiction entre leurs résultats et les mesures directes. La géométrie exposée dans les nos 18 à 33 répond donc à tous les besoins et doit être considérée comme la véritable géométrie expérimentale, en même temps qu'elle est la plus simple des géométries théoriquement possibles.

Il ne faut pas oublier, cependant, que pour les valeurs très petites de k et de k', les géométries sphérique et pseudo-sphérique convergent indéfiniment vers la géométrie usuelle. Donc, tant que l'on trouvera expérimentalement k ou $k' = 0$, on pourra prétendre, à la rigueur, que l'expérience a manqué de précision et que k ou k' n'est pas nul, mais seulement très petit.

La réciproque n'est pas vraie. Si un jour le perfectionnement des instruments d'optique permettait de donner aux mesures une précision beaucoup plus grande qu'aujourd'hui, on pourrait être obligé de changer de formules et de prendre,

au lieu de (8), la formule (9), avec l'une des formes φ qui sont possibles, et une valeur très petite, mais non nulle, de k ou de k'. Le fait est improbable, mais non impossible. Tant qu'il ne se sera pas produit, la seule géométrie à employer est évidemment celle qui découle de la formule (8) et qui est exposée dans les nos 18 à 33.

Inanité des tentatives de démonstration des postulatums de la géométrie ordinaire.

51. Après tout ce qui précède, est-il encore nécessaire de réfuter l'erreur des esprits attardés qui croient pouvoir trouver des démonstrations théoriques des principes expérimentaux de la géométrie ordinaire, et en particulier du plus célèbre de tous, le principe de la parallèle unique, équivalent au postulatum d'Euclide?

Nous venons de voir que les systèmes de géométrie théoriquement possibles sont en nombre infini, bien qu'ordinairement divisés en trois classes ou espèces; et que pour distinguer entre eux, ou même pour écarter un seul de ces systèmes, il a fallu invoquer l'expérience.

Or, le principe de la parallèle unique n'est vrai que dans un de ces groupes; dans un autre, il y a deux parallèles (ou une infinité, selon la manière de l'entendre); dans le troisième, le parallélisme est impossible.

Démontrer ce principe sans invoquer l'expérience équivaudrait donc à démontrer l'impossibilité, même théorique, des systèmes où ce principe n'existe pas, c'est-à-dire à démontrer le contraire de ce qui a été établi dans le présent mémoire.

Quelle que fût, en effet, la forme de la démonstration, elle pourrait toujours être transformée dans les notations que nous avons adoptées, et en la comparant avec nos calculs, on aboutirait finalement à une contradiction ou à la découverte d'une erreur matérielle.

Il y a donc lieu d'abandonner de pareilles tentatives, et de reconnaître à la géométrie usuelle son véritable caractère, qui

est de constituer le plus simple des systèmes de géométrie théoriquement possibles, en même temps qu'elle s'accorde avec tous les résultats de l'expérience.

NOTE I.

Sur la seconde racine de l'équation (17).

Nous avons admis, dans le texte, que la véritable valeur de $\varphi(23)$, tirée de l'équation (17), est toujours

$$\varphi(23) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2.$$

Le doute pourrait provenir uniquement de ce que l'équation (17) a deux racines.

Commençons par montrer que la seconde racine algébrique de l'équation, supposée différente de la première, ne peut être indépendante de x_1, y_1, z_1.

En effet, si elle en était indépendante, on pourrait poser $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ (il s'agit ici d'une opération purement algébrique, qui n'a rien de commun avec la signification géométrique des lettres), et si l'équation ainsi transformée avait encore deux racines algébriques bien déterminées, ces racines devraient être les mêmes qu'avant la substitution.

Opérant cette substitution, retranchant la seconde ligne de la troisième, ainsi que la seconde colonne de la troisième et égalant à δ la différence entre la seconde racine et la première, le déterminant devient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & (x_2-x_a)^2+\cdots & (x_2-x_b)^2+\cdots & (x_2-x_3)^2+\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 1 & (x_2-x_a)^2+\cdots & 0 & 0 & (x_a-x_b)^2+\cdots & (x_a-x_3)^2+\cdots \\ 1 & (x_2-x_b)^2+\cdots & 0 & (x_a-x_b)^2+\cdots & 0 & (x_b-x_3)^2+\cdots \\ 1 & (x_2-x_3)^2+\cdots & \delta & (x_a-x_3)^2+\cdots & (x_b-x_3)^2+\cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation, bien qu'étant encore du second degré en δ, n'a pas d'autre racine algébrique que $\delta = 0$.

Donc la seconde racine algébrique de l'équation (17) serait égale à la première, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi donc cette seconde racine n'est pas indépendante de x_1, y_1, z_1.

Cela posé, faisons varier x_1, y_1, z_1, non plus brusquement, mais de quantités suffisamment petites pour que les signes de z_2 et de z_3, qui dépendent de la position du point x_1, y_1, z_1 (n° 22), ne puissent changer (*). Ce changement étant d'ailleurs le seul qui pût se produire, toutes les lettres contenues dans l'équation (excepté x_1, y_1 et z_1) conserveraient leurs valeurs. Or maintenant $\varphi(23)$, qui est resté invariable puisque les points 2 et 3 n'ont pas changé, ne pourrait plus être représenté, ni par la première racine, qui a déjà été rejetée, ni par la seconde, qui varie avec x_1, y_1, z_1. On aboutit donc à une contradiction, et il en résulte que pour des points 2 et 3, absolument quelconques, $\varphi(23)$ est toujours représenté par

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$

et jamais par une valeur différente.

NOTE II.

Démonstration du fait que les déterminants (8) *et* (9) (n° 14) *satisfont à la condition des six points* (**).

Considérons d'abord le déterminant (8).

(*) A la rigueur, cette considération empiète peut-être un peu sur le principe de continuité, dont il n'est question dans le texte que plus loin.

(**) Le principe des calculs développés dans cette Note et dans la suivante nous a été communiqué par M. P. Mansion.

Il s'agit de démontrer que, si l'on représente par (12345) le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{24} & n_{25} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{34} & n_{35} \\ 1 & n_{14} & n_{24} & n_{34} & 0 & n_{45} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & n_{45} & 0 \end{vmatrix},$$

l'existence des trois équations

$$(a). \quad \left\{ \begin{array}{l} (12343) = 0, \\ (12346) = 0, \\ (12356) = 0, \end{array} \right.$$

entraîne forcément celle de :

$$\begin{array}{l} (12456) = 0, \\ (13456) = 0, \\ (23456) = 0, \end{array}$$

quelle que soit la signification des dix quantités n

Considérons 16 quantités auxiliaires :

$$\begin{array}{l} x_1, \ldots, x_4, \\ y_1, \ldots, y_4, \\ z_1, \ldots, z_4, \\ u_1, \ldots, u_4. \end{array}$$

liées par les 16 équations suivantes :

$$(b)\quad n_{pq} = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 + (u_p - u_q)^2$$

(p et q variant de 1 à 4 : 6 équations).

$$(c)\ \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{r} x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 0 \\ y_2 = z_2 = u_2 = 0 \\ z_3 = u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array} \right\} \text{(10 équations).}$$

Ces 16 quantités étant déterminées, calculons 4 autres quantités x_5, y_5, z_5, u_5, par les 4 équations :

$$n_{r5} = (x_r - x_5)^2 + (y_r - y_5)^2 + (z_r - z_5)^2 + (u_r - u_5)^2,$$

où r varie de 1 à 4 ; puis de même les 4 quantités x_6, y_6, z_6, u_6, par les équations :

$$n_{s6} = (x_s - x_6)^2 + (y_s - y_6)^2 + (z_s - z_6)^2 + (u_s - u_6)^2,$$

où s varie encore de 1 à 4.

Servons-nous maintenant des 24 quantités $x_1, \ldots, u_6$, ainsi déterminées, pour transformer les équations données :

$$(12345) = 0,$$

$$(12346) = 0.$$

Nous ferons le calcul en détail pour la première équation seulement.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix} = D$$

peut se mettre, en vertu d'une propriété bien connue, sous la forme :

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + u_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + u_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix},$$

ou bien encore sous la forme équivalente :

$$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & -2u_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 & 1 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 & -2u_2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + u_3^2 & 1 & -2x_3 & -2y_3 & -2z_3 & -2u_3 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + u_4^2 & 1 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 & -2u_4 \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & -2u_5 \end{vmatrix}.$$

Le carré du déterminant D est donc égal au produit des deux derniers déterminants, et en effectuant ce produit par la

règle ordinaire, on trouve :

$$D^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{24} & n_{25} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{34} & n_{35} \\ 1 & n_{14} & n_{24} & n_{34} & 0 & n_{45} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & n_{45} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}(12345),$$

d'où :

$$(12345) = -16\,D^2 = -16\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}^2.$$

Opérant exactement de même pour le déterminant (12346), on trouvera :

$$(12346) = -16\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2.$$

Introduisons maintenant les équations (*c*), ainsi que les conditions (12345) = 0, (12346) = 0.

(12345) devient :

$$-16\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}^2 = -16(x_2y_3z_4u_5)^2.$$

Il faut donc que le produit $x_2y_3z_4u_5$ soit nul.

Or je dis que cela entraîne la nullité de u_5, quels que soient les autres facteurs, fussent-ils même nuls.

En effet, supposons que u_5 ait une valeur déterminée k, différente de zéro.

x_2, y_3 et z_4 ne sont fonctions, d'après les équations (*b*) et (*c*), que des six nombres n_{12}, ... n_{34}. Faisons varier ces nombres de quantités aussi petites que l'on voudra, mais réglées de telle manière que x_2, y_3 et z_4 ne soient plus nuls. L'effet de ces variations *aussi petites que l'on veut* et des variations correspondantes des autres quantités n, réglées par les équations (*a*), serait donc de faire sauter brusquement u_5 de la valeur k à la valeur 0, ce qui est impossible. Donc u_5 est toujours nul.

On démontrera de même, au moyen du second déterminant, que $u_6 = 0$.

Si l'on essaye d'appliquer au déterminant (12356) les mêmes calculs qu'aux deux premiers, la différence consistera en ce que l'on ne possède pas l'équation

$$n_{56} = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (u_5 - u_6)^2.$$

On trouvera donc, en posant le second membre égal à n'_{56} :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{35} & n_{36} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & 0 & n'_{56} \\ 1 & n_{16} & n_{26} & n_{36} & n'_{56} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais d'autre part, on donne l'équation :

$$(12356) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{35} & n_{36} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & 0 & n_{56} \\ 1 & n_{16} & n_{26} & n_{36} & n_{56} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit de prouver que l'on peut en déduire :

$$n_{56} = n'_{56} = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (u_5 - u_6)^2,$$

bien que l'équation du second degré exprimée par le déterminant ait deux racines, difficulté analogue à celle qui s'est présentée dans la Note I, mais moindre ici.

En effet, tout se réduit à montrer qu'en choisissant de deux manières différentes les valeurs de $x_2, \dots x_6, y_3, \dots y_6, z_4, \dots z_6$, on peut trouver deux valeurs différentes pour n'_{56}. Ce seront les deux racines en question, donc l'une des deux sera forcément égale à n_{56}, et l'on choisira les valeurs correspondantes de $x_2 \dots z_6$.

Mais précisément parce qu'il y a tant de combinaisons possibles, et qu'elles doivent se réduire à deux, il s'agit de prouver nettement qu'elles ne se réduisent pas à une seule, différente de n_{56}.

Fixons arbitrairement x_2, y_3, mais donnons à z_4, successivement, les deux valeurs, égales et de signes contraires, que les équations lui attribuent.

Dans les équations en x_5, y_5, z_5, u_5 (où $u_5 = 0$), choisissons pour x_5 et y_5 l'une quelconque des valeurs données par les solutions; z_5 aura deux valeurs égales et de signes contraires suivant les valeurs de z_4. On peut raisonner de même pour z_6,

mais là il suffit de prendre une seule valeur, comme pour x_6 et y_6. Il en résulte qu'à cause des deux valeurs de z_5, la quantité

$$(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2$$

aura elle-même deux valeurs, ce qu'il fallait prouver.

Il y aurait exception si l'on avait $z_5 = 0$, ou $z_6 = 0$; mais cela ne pourrait arriver qu'à cause d'une relation particulière entre les n : $\chi(n_{15}, n_{25}, n_{35}, n_{45}) = 0$, ou $\chi(n_{16}, n_{26} \ldots) = 0$. Alors on ne trouverait (au moins par cette méthode) qu'une seule racine n'_{56}. Or la différence entre cette racine et n_{56}, si elle n'est pas nulle, est une quantité déterminée, tandis qu'en modifiant les n de quantités aussi petites que l'on veut, de manière qu'ils ne satisfassent plus à χ, mais bien aux trois équations données, on devrait retrouver brusquement la seconde racine n_{56}.

Donc cette hypothèse est impossible, et on peut choisir les coordonnées auxiliaires de manière à avoir :

$$n_{56} = n'_{56} = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (u_5 - u_6)^2.$$

A partir de ce moment il y a symétrie parfaite, au point de vue des indices, dans tous les calculs où l'on n'emploie pas directement les équations (*c*), et par conséquent on trouvera :

$$(12456) = -16 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2,$$

$$(13456) = -16 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2,$$

$$(23456) = -16 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2,$$

et en employant maintenant toutes les équations données et trouvées, on voit que ces trois déterminants sont aussi nuls, parce que la dernière colonne ne contient que des zéros. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Passons maintenant au déterminant (9).

Il s'agit de démontrer que, si l'on représente par (12345) le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ n_{12} & 1 & n_{23} & n_{24} & n_{25} \\ n_{13} & n_{23} & 1 & n_{34} & n_{35} \\ n_{14} & n_{24} & n_{34} & 1 & n_{45} \\ n_{15} & n_{25} & n_{35} & n_{45} & 1 \end{vmatrix},$$

l'existence des trois équations

$$(12345) = 0,$$
$$(12346) = 0,$$
$$(12356) = 0,$$

entraînera encore celle de

$$(12456) = 0,$$
$$(13456) = 0,$$
$$(23456) = 0,$$

quelle que soit la signification des 10 quantités n.

Considérons 20 quantités auxiliaires :

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4, \\ t_1, & t_2, & t_3, & t_4, \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, \end{array}$$

liées par les 20 équations suivantes :

$$n_{pq} = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q + t_p t_q + u_p u_q$$

(p et q variant de 1 à 4 : 6 équations);

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 + u_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2 + u_2^2 = 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + t_3^2 + u_3^2 = 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + t_4^2 + u_4^2 = 1 \end{array}\right\} \text{(4 équations);}$$

$$(d) \left\{\begin{array}{r} y_1 = z_1 = t_1 = u_1 = 0 \\ z_2 = t_2 = u_2 = 0 \\ t_3 = u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array}\right\} \text{(10 équations).}$$

Ces 20 quantités étant déterminées, calculons 5 autres quantités :

$$x_5, \quad y_5, \quad z_5, \quad t_5, \quad u_5,$$

par les 5 équations :

$$n_{r5} = x_r x_5 + y_r y_5 + z_r z_5 + t_r t_5 + u_r u_5$$

(r variant de 1 à 4 : 4 équations)

et

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + t_5^2 + u_5^2 = 1 ;$$

puis de même les cinq quantités :

$$x_6, \quad y_6, \quad z_6, \quad t_6, \quad u_6,$$

par les équations :

$$n_{s6} = x_s x_6 + y_s y_6 + z_s z_6 + t_s t_6 + u_s u_6$$

(s variant de 1 à 4 : 4 équations)

et

$$x_6^2 + y_6^2 + z_6^2 + t_6^2 + u_6^2 = 1.$$

Servons-nous maintenant des 30 quantités $x_1, \ldots u_6$ ainsi déterminées, pour transformer les équations données :

$$(12345) = 0,$$

$$(12346) = 0.$$

Le premier déterminant peut se mettre directement sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \end{vmatrix}^2 .$$

De même le second déterminant (12346) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & u_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 & t_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 .$$

Introduisons maintenant les équations (*d*), ainsi que les conditions (12345) = 0, (12346) = 0.

(12345) devient :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 z_3 t_4 u_5)^2 .$$

De même pour (12346), et l'on démontre comme précédemment que $u_5 = 0$, $u_6 = 0$.

Le déterminant (12356) = 0 ne se prête pas immédiatement

aux mêmes calculs que les deux premiers, parce que l'on ne possède pas l'équation :

$$n_{56} = x_5x_6 + y_5y_6 + z_5z_6 + t_5t_6 + u_5u_6.$$

En posant le second membre égal à n'_{56}, on trouve :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & u_3 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & t_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ n_{12} & 1 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ n_{13} & n_{23} & 1 & n_{35} & n_{36} \\ n_{15} & n_{25} & n_{35} & 1 & n'_{56} \\ n_{16} & n_{26} & n_{36} & n'_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais d'autre part on donne l'équation :

$$(12356) = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ n_{12} & 1 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ n_{13} & n_{23} & 1 & n_{35} & n_{36} \\ n_{15} & n_{25} & n_{35} & 1 & n_{56} \\ n_{16} & n_{26} & n_{36} & n_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on démontrera comme précédemment que l'on peut choisir les variables auxiliaires de manière à avoir :

$$n_{56} = n'_{56} = x_5x_6 + y_5y_6 + z_5z_6 + t_5t_6 + u_5u_6.$$

A partir de ce moment, il y a symétrie parfaite, au point de vue des indices, dans tous les calculs où l'on n'emploie pas

directement les équations (*d*), et par conséquent on trouvera :

$$(12456) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & t_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 ;$$

de même pour (13456) et (23456); et en employant maintenant toutes les équations données et trouvées, on voit que ces trois déterminants sont aussi nuls, parce que la dernière colonne ne contient que des zéros. C'est ce qu'il fallait démontrer.

NOTE III.

Élimination de neuf quantités entre dix équations (n° 34).

Pour écrire ces équations d'une manière symétrique, nous donnerons à chaque point trois coordonnées, même quand la troisième (z_a par exemple) est nulle. Nous prendrons aussi les signes supérieurs, puisque l'élimination se fait de la même manière dans les deux cas, et que la discussion de l'autre cas est plus simple.

Les dix équations sont alors :

$$\varphi(AB) = \frac{1 + x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{(1 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)(1 + x_b^2 + y_b^2 + z_b^2)}},$$

$$\varphi(AC) = \cdots$$

$$\varphi(BC) = \cdots$$

$$\varphi(1A) = \cdots$$

$$\varphi(1B) = \cdots$$

$$\varphi(1C) = \cdots$$

$$\varphi(2A) = \cdots$$

$$\varphi(2B) = \cdots$$

$$\varphi(2C) = \cdots$$

et enfin :

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(12) & \varphi(1A) & \varphi(1B) & \varphi(1C) \\ \varphi(12) & 1 & \varphi(2A) & \varphi(2B) & \varphi(2C) \\ \varphi(1A) & \varphi(2A) & 1 & \varphi(AB) & \varphi(AC) \\ \varphi(1B) & \varphi(2B) & \varphi(AB) & 1 & \varphi(BC) \\ \varphi(1C) & \varphi(2C) & \varphi(AC) & \varphi(BC) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Introduisons des coordonnées nouvelles p, q, r, s, t, déterminées, par exemple pour le point A, par :

$$\frac{q_a}{p_a} = x_a, \quad \frac{r_a}{p_a} = y_a, \quad \frac{s_a}{p_a} = z_a, \quad t_a = 0,$$

$$p_a^2 + q_a^2 + r_a^2 + s_a^2 + t_a^2 = 1.$$

La coordonnée t_a, qui semble inutile, est introduite par raison de symétrie, pour avoir autant de coordonnées qu'il y a de colonnes dans le déterminant; et de même pour les autres points.

En remplaçant dans $\varphi(AB)$, il vient :

$$(e) \quad . \quad . \quad \varphi(AB) = p_a p_b + q_a q_b + r_a r_b + s_a s_b + t_a t_b,$$

en admettant que le signe de $p_a p_b$ soit le même que celui du radical, circonstance sur laquelle nous reviendrons.

De même pour les autres φ.

Posons :

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 + s_1 s_2 + t_1 t_2 = \theta(12).$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 & t_2 \\ p_a & q_a & r_a & s_a & t_a \\ p_b & q_b & r_b & s_b & t_b \\ p_c & q_c & r_c & s_c & t_c \end{vmatrix}$$

est identiquement nul, puisque sa dernière colonne se compose de zéros. On a donc, en l'élevant au carré par la règle ordinaire :

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta(12) & \varphi(1A) & \varphi(1B) & \varphi(1C) \\ \theta(12) & 1 & \varphi(2A) & \varphi(2B) & \varphi(2C) \\ \varphi(1A) & \varphi(2A) & 1 & \varphi(AB) & \varphi(AC) \\ \varphi(1B) & \varphi(2B) & \varphi(AB) & 1 & \varphi(BC) \\ \varphi(1C) & \varphi(2C) & \varphi(AC) & \varphi(BC) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'une des racines de cette équation est donc :

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(12) = p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 \\ \qquad = \dfrac{1 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}, \end{array} \right.$$

le radical ayant cette fois le signe de p_1p_2.

La seconde racine est évidemment :

$$(g) \quad \frac{1 + x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}},$$

puisque, dans l'équation, on peut changer z_1 en $-z_1$ et z_2 en $-z_2$, simultanément ou séparément.

L'une de ces racines doit représenter $\varphi(12)$. On agira donc ici exactement comme dans le premier système de géométrie (ainsi que cela a déjà été dit au n° 39), c'est-à-dire qu'après avoir calculé z_1^2, on donnera à z_1 un signe arbitraire, puis on choisira z_2, ... de manière que $\varphi(12)$, ... soient représentés par (f) et non par (g). Il restera à prouver alors qu'il en sera de même pour un intervalle tel que (23), ne comprenant pas le point 1. Cette démonstration se fera exactement comme dans la Note I.

Il reste à expliquer comment on peut faire en sorte que le signe de la quantité analogue à $p_a p_b$ soit toujours celui du radical correspondant, et ensuite à déterminer complètement le signe du radical dans l'équation (e).

Nous démontrerons (Note VII) que les trois radicaux de $\varphi(AB)$, $\varphi(AC)$, $\varphi(BC)$, peuvent être pris positivement. Dès lors, on choisira les valeurs positives de p_a, p_b et p_c.

$\varphi(1A)$, $\varphi(1B)$, $\varphi(1C)$ peuvent être pris avec des radicaux de même signe (n° 44), mais ici le signe peut être $+$ ou $-$; on donnera le même signe à p_1; puis on agira d'une manière analogue pour p_2.

Alors l'équation analogue à (e) sera toujours exacte, et l'on voit de plus que le radical de $\varphi(12)$ sera positif si les six radicaux de 1 et de 2 sont tous de même signe, négatif si les six radicaux en question se partagent par groupes de trois quant à leurs signes. Ceci justifie une autre assertion du n° 44.

L'élimination des n^{os} 20 et suivants aurait pu se faire d'une manière analogue à celle qui est présentée dans la Note actuelle, mais là nous n'avons pas rencontré trop de difficultés dans l'emploi des coordonnées ordinaires.

NOTE IV.

Sur l'impossibilité d'un système de géométrie non compris dans les déterminants (8) *et* (9) (n° 14).

Après avoir signalé (n° 14) les deux déterminants (8) et (9), d'où nous avons déduit les divers systèmes de géométrie possibles, nous ajoutions (n° 15) :

« On pourrait soutenir qu'en dehors des deux formes trouvées, il en existerait une troisième, distincte des deux autres, vérifiant également la condition des six points, et par conséquent capable d'exprimer la relation entre les 10 intervalles de 5 points de l'espace.

» En attendant que cette question soit complètement résolue par l'analyse pure, nous montrerons plus loin que la découverte d'une nouvelle fonction, si elle était possible, ne conduirait pas à un nouveau système de géométrie, distinct de ceux qui résultent des deux fonctions déjà trouvées. »

Le moment est venu d'accomplir cette promesse, et à cet effet nous allons rechercher directement tous les systèmes de géométrie ayant en commun avec le système usuel les notions de la droite et du plan.

Nous suivrons pour cela la même marche que dans mes *Études de mécanique abstraite* (*), mais en la simplifiant et la généralisant. Quant au principe sur lequel elle est basée, un quart de siècle de réflexions nouvelles ne m'en ont pas fait découvrir un meilleur. Dans un autre mémoire intitulé : *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (**), j'ai reproduit en partie les mêmes idées, en les com-

(*) Mémoire présenté à la Classe des sciences le 1er août 1868 et inséré dans le tome XXI des *Mémoires* in-8°.

(**) *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III (2e série).

pliquant par l'introduction de la méthode des limites. C'était une concession faite aux idées de l'enseignement actuel et je ne crois pas opportun de la maintenir. Du moment qu'il faut admettre que le rapport de deux longueurs converge vers une limite, autant vaut admettre immédiatement la notion de vitesse; mais pour couper court à tout scrupule, nous écarterons les systèmes de géométrie dont les formules seraient telles qu'elles ne donneraient pas des vitesses déterminées pour tous les points d'une figure plane dont deux points possèdent de pareilles vitesses.

Trigonométrie cinématique. — Le cosinus cinématique d'un angle α est la quantité constante par laquelle il faut multiplier une vitesse quelconque, dirigée suivant l'un des côtés de cet angle, pour obtenir sa composante suivant l'autre côté, lorsque la seconde composante passe par le sommet de l'angle et qu'elle est perpendiculaire à la première.

Le sinus cinématique d'un angle est le cosinus de son complément. Les autres fonctions trigonométriques cinématiques se définissent au moyen du sin et du cos, par les mêmes formules que dans la trigonométrie ordinaire.

Une vitesse u étant décomposée en $u\cos\alpha$ et $u\sin\alpha$, si l'on décompose encore $u\cos\alpha$ et $u\sin\alpha$ suivant la direction de u et une perpendiculaire à u, on trouve la formule

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Une vitesse u étant décomposée en $u\cos(\alpha+\beta)$ et $u\sin(\alpha+\beta)$, si l'on effectue la même décomposition par parties, en ne prenant qu'un seul des angles α ou β à la fois, on trouve les formules :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Les trois formules ainsi trouvées, combinées avec les rela-

tions évidentes $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, suffisent pour calculer, avec une approximation indéfinie, les fonctions trigonométriques cinématiques d'un angle quelconque, et il en résulte que ces fonctions sont les mêmes que les lignes trigonométriques ordinaires (*).

Considérons un triangle ABC, que nous faisons tourner autour du sommet A. Les vitesses absolues des points B et C seront proportionnelles à circ c et circ b, et les composantes de ces vitesses dans la direction BC seront dans le rapport de circ c sin B à circ b sin C. D'ailleurs, le côté BC conservant sa longueur, ces deux composantes doivent être égales, donc circ c sin B = circ b sin C, ce que l'on peut exprimer en disant que, dans tout triangle, les circonférences décrites avec les côtés comme rayons sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

Étant donné un triangle quelconque ABC, posons :

$$(h) \quad . \quad . \quad 1 - \frac{k^2}{4\pi^2} \operatorname{circ}^2 a = \frac{(\cos A + \cos B \cos C)^2}{\sin^2 B \sin^2 C} \text{ (**).}$$

Nous pourrons toujours en déduire une valeur réelle pour k^2.

(*) Il est étonnant qu'un raisonnement si simple, si primordial, ait pu laisser place à des doutes. Je ne citerai pas toutes les objections qu'on y a faites, mais seulement la plus bizarre. « Êtes-vous bien sûr », me disait-on, « que dans cette cinématique du point, vous n'introduisez pas, au fond, le postulatum d'Euclide? — S'il en est ainsi », répondais-je, « je dois être un maladroit de premier ordre, puisque, introduisant le postulatum dans les prémisses de mon raisonnement, je ne parviens pas à le faire réapparaître dans les conséquences. »

(**) π est la limite du rapport de la circonférence au diamètre, lorsque ce dernier décroît indéfiniment. On verra plus loin que cette limite existe. En ce moment, π est une simple constante comme k, et l'on peut se demander pourquoi nous en introduisons deux. C'est pour conserver à la lettre k une même signification, d'un bout à l'autre de ce Mémoire.

Le théorème de la proportionnalité donne :

$$(i) \quad \ldots \quad \frac{\sin^2 A}{\frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c},$$

et par la combinaison des équations (h) et (i), on obtient ensuite :

$$(j) \quad \ldots \quad \begin{cases} 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b = \dfrac{(\cos B + \cos A \cos C)^2}{\sin^2 A \sin^2 C}, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c = \dfrac{(\cos C + \cos A \cos B)^2}{\sin^2 A \sin^2 B}. \end{cases}$$

Ainsi dans tout triangle, on a les cinq formules (h), (i) et (j), la quantité k représentant une même constante, réelle ou imaginaire simple, dans les cinq formules. Il reste à voir si k est aussi constant en passant d'un triangle à un autre.

Mais montrons d'abord qu'il n'y a pas d'exception pour $k = 0$. Si l'équation (h) donnait cette valeur pour k, il en résulterait :

$$(\cos A + \cos B \cos C)^2 = \sin^2 B \sin^2 C,$$

équation qui est identique à l'une quelconque de ces deux autres :

$$(\cos B + \cos A \cos C)^2 = \sin^2 A \sin^2 C,$$

$$(\cos C + \cos A \cos B)^2 = \sin^2 A \sin^2 B.$$

Les cinq équations existent donc encore, car dans les équations (i) on aurait soin de ne pas introduire le facteur parasite $\frac{k^2}{4\pi^2}$.

Triangles rectangles. Si, dans les formules qui précèdent, on fait $A = 90^\circ$, on trouve :

$$(k)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{circ} b = \operatorname{circ} a \sin B, \\ \operatorname{circ} c = \operatorname{circ} a \sin C, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a = \cot^2 B \cot^2 C, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b = \dfrac{\cos^2 B}{\sin^2 C}, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c = \dfrac{\cos^2 C}{\sin^2 B}, \end{array}\right.$$

formules qui restent vraies pour toutes les valeurs de k, y compris la valeur zéro.

Considérons un triangle quelconque ABC, et du sommet C abaissons sur la base AB la perpendiculaire CD. Appelons respectivement A′ et B′ les angles ACD et BCD.

Si k et k' sont les coefficients respectifs des triangles ACD, BCD, on aura, dans ces triangles, en vertu des formules des triangles rectangles :

$$1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 CD = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A'},$$
$$1 - \frac{k'^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 CD = \frac{\cos^2 B}{\sin^2 B'}.$$

Mais, si l'on fait glisser le triangle le long de sa base AB, les points de la base ayant la vitesse v, et le point C la vitesse v' perpendiculaire à CD (*), les vitesses des points A et C, décomposées suivant AC, seront respectivement $v \cos A$ et $v' \sin A'$;

(*) Admettre que $v' = v$ équivaudrait à admettre le postulatum d'Euclide.

les vitesses de B et de C, décomposées suivant BC, seront de même $v \cos B$ et $v' \sin B'$. On a donc :

$$v \cos A = v' \sin A',$$
$$v \cos B = v' \sin B';$$

d'où, par l'élimination de v et de v' :

$$\frac{\cos A}{\sin A'} = \frac{\cos B}{\sin B'}.$$

En comparant à ce qui précède, on trouve :

$$1 - \frac{k^2}{4\pi^2} \operatorname{circ}^2 CD = 1 - \frac{k'^2}{4\pi^2} \operatorname{circ}^2 CD,$$

d'où

$$k^2 = k'^2.$$

Ainsi, dans deux triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit égal, le coefficient k est le même (*), car ces deux triangles pourront toujours être accolés comme l'étaient les deux triangles rectangles ACD et BCD.

Il en résulte d'abord que le coefficient k est le même dans tous les triangles rectangles, car deux triangles rectangles quelconques, ayant pour côtés de l'angle droit respectivement a et b, c et d, peuvent être comparés à un troisième triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et c, a et d, b et c, ou b et d.

Il en résulte aussi que le coefficient k est le même dans tous les triangles, parce que les formules des triangles quelconques peuvent se déduire de celles des triangles rectangles.

(*) Abstraction faite de son signe, lequel est toujours indifférent, comme les formules l'indiquent.

Nous allons achever maintenant ce qui se rapporte à l'hypothèse $k = 0$.

Considérons un triangle ABC, rectangle en A. L'angle A et le côté c restant constants, supposons que le côté b augmente de db, ce qui, en vertu de la décomposition des vitesses, entraîne pour le côté a une augmentation égale à $db \cos C$.

On a :

$$(l) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{circ}^2 b = \text{circ}^2 a \sin^2 B, \\ \text{circ}^2 c = \text{circ}^2 a \sin^2 C, \\ \sin^2 C = \cos^2 B, \quad \sin^2 B = \cos^2 C, \\ \text{d'où :} \\ \text{circ}^2 c = \text{circ}^2 a - \text{circ}^2 b. \end{array} \right.$$

Exprimons que la différentielle du second membre est nulle, en représentant provisoirement la dérivée inconnue de circ a par $\varphi(a)$, et en remplaçant, après la différentiation, cos C par sa valeur $\pm \frac{\text{circ } b}{\text{circ } a}$. Il viendra, toutes réductions faites :

$$\varphi(b) = \pm \varphi(a).$$

Ce double signe, qui apparaît pour la première fois, nous place en présence d'une difficulté apparente, qu'il ne faut pas dissimuler, mais bien réduire à sa juste valeur.

b et a sont indépendants l'un de l'autre, et la dérivée $\varphi(a)$, que nous supposons finie, déterminée et continue, ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Si donc on ne prenait pas toujours le signe +, il faudrait admettre que la circonférence, qui croît d'abord avec son rayon, atteindrait un maximum et décroîtrait ensuite.

Sans nous prononcer, *a priori*, sur la possibilité de pareilles variations, observons que nous avons simplement pour objet, dans l'hypothèse $k = 0$, d'établir la relation (8) entre les intervalles de cinq points de l'espace.

Or, nous avons admis que l'espace est homogène, en ce sens que la relation entre les intervalles est la même pour cinq

points quelconques. Si donc cette relation est établie *rigoureusement* pour cinq points à intervalles assez petits, elle sera établie aussi pour cinq points quelconques (*).

Nous pouvons donc prendre tous nos intervalles assez petits pour rester dans les limites où les circonférences augmentent certainement avec leur rayon, et dès lors l'on a, sans ambiguïté :

$$\varphi(b) = \varphi(a),$$

ou, ce qui revient au même :

$$\varphi(a) = \textit{constante} = c.$$

Intégrant entre 0 et a, il vient :

$$\text{circ } a = ca.$$

Il en résulte que, dans l'hypothèse $k = 0$, non seulement le rapport de la circonférence au rayon a une limite c, mais, de plus, il reste constamment égal à cette limite. Comme nous l'avons appelée précédemment 2π, nous écrirons :

$$\text{circ } a = 2\pi a.$$

Il est bon d'observer, en passant, que l'ambiguïté de signe, devant disparaître dans l'équation

$$\varphi(b) = \pm \varphi(a),$$

disparaît en même temps dans

$$\cos C = \pm \frac{\text{circ } b}{\text{circ } a},$$

où le signe + doit seul être conservé.

(*) Il n'en serait pas de même si la relation n'était qu'approximative. Elle pourrait alors être l'expression-limite d'une relation plus compliquée.

Dès lors les quatre premières formules (*l*) deviennent, aussi sans ambiguïté :

$$\text{circ } b = \text{circ } a \sin B,$$

$$\text{circ } c = \text{circ } a \sin C,$$

$$\sin C = \cos B,$$

$$\sin B = \cos C,$$

parce que les circonférences sont positives, et que les cosinus le sont aussi, comme on vient de le voir.

Des deux dernières équations on tire $B + C = 90^\circ$. Ainsi, dans tout triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires. Cela suffit pour établir l'existence du rectangle, ayant les quatre angles droits et les côtés opposés égaux.

D'autre part, si l'on introduit la valeur trouvée pour la circonférence dans :

$$\text{circ}^2 a = \text{circ}^2 b + \text{circ}^2 c,$$

il vient :

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

c'est-à-dire que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés.

Nous possédons maintenant tout ce qu'il faut pour calculer l'intervalle de deux points en coordonnées ordinaires.

Considérons un système de trois axes rectangulaires OX, OY et OZ. D'un point quelconque de l'espace, abaissons trois perpendiculaires sur ces axes. Les distances comptées depuis l'origine jusqu'aux pieds de ces perpendiculaires représenteront respectivement les coordonnées, x, y, z, du point donné.

Si x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 sont les coordonnées des deux points,

on trouve immédiatement, en n'employant que des rectangles et des triangles rectangles :

$$\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

formule identique à l'équation (15) du texte, et comme cette expression de l'intervalle de deux points, introduite dans le déterminant (8), pour un système de cinq points, transforme ce déterminant en une identité, quel que soit le sens des lettres $x_1, \ldots$, on voit que la relation (8) entre les intervalles de cinq points est établie dans l'hypothèse $k = 0$.

On voit aussi, ce qui était d'ailleurs assez évident, que les coordonnées introduites analytiquement dans le texte étaient tout simplement les coordonnées ordinaires.

La marche que nous venons de suivre paraîtra peut-être un peu longue ou compliquée pour la géométrie ordinaire; mais je ne pense pas qu'on puisse la simplifier beaucoup; et, en outre, elle a l'avantage de s'appliquer exactement à l'hypothèse de k différent de zéro, comme nous allons le voir en la suivant pas à pas dans cette nouvelle hypothèse, laquelle doit nous conduire à la seconde forme (22) de l'intervalle de deux points et au second déterminant (9).

Les formules (h), (i), (j), (k) étant établies, reprenons notre triangle rectangle ABC et agissons comme précédemment.

Des formules (k) nous tirons par élimination :

$$1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c = \frac{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b}$$

et

$$\cos C = \pm \frac{\operatorname{circ} b}{\operatorname{circ} a}\sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b}}.$$

Différentiant la première, avec $dc = 0$, $da = db \cos C$, puis remplaçant cos C par la valeur tirée de la seconde, il vient, toutes réductions faites :

$$\frac{\varphi(b)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b}} = \pm \frac{\varphi(a)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}}.$$

Éliminons d'abord le double signe ± pour les mêmes raisons (encore plus nécessaires à expliquer ici) que dans l'hypothèse $k = 0$. Il restera :

$$\frac{\varphi(a)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}} = \gamma,$$

d'où, en intégrant entre 0 et a :

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k}{2\pi}\operatorname{circ} a\right) = \frac{k\gamma a}{2\pi}\,(^*),$$

ou, ce qui revient au même :

$$\sin\frac{k\gamma a}{2\pi} = \frac{k}{2\pi}\operatorname{circ} a,$$

ou enfin :

$$\frac{\operatorname{circ} a}{a} = \gamma\,\frac{\sin\dfrac{k\gamma a}{2\pi}}{\dfrac{k\gamma a}{2\pi}}.$$

Pour déterminer γ, passons à la limite en faisant décroître

(*) Les fonctions arc sin et sin sont prises ici dans leur sens purement analytique, c'est-à-dire déterminées par les séries connues.

On aurait pu faire la même observation pour les angles et mesurer ceux-ci dans une circonférence de longueur 2π (dont le rayon serait provisoirement inconnu). Alors leurs fonctions trigonométriques seraient déterminées par les mêmes séries. Mais pour les angles il n'y avait pas de doute possible sur le sens des formules.

indéfiniment la valeur de a; alors, comme on le sait par la série analytique du sin, le rapport qui se trouve au second membre converge vers l'unité, donc le premier membre converge vers une limite déterminée γ, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, et puisque nous avons appelé cette limite 2π, il vient :

$$\gamma = 2\pi$$

et

$$\text{circ } a = \frac{2\pi}{k} \sin ka.$$

Nous devons revenir maintenant sur les formules des triangles, qui prennent (comme dans l'hypothèse $k = 0$) une forme plus précise par la suppression des doubles signes. On a vu, en effet, que le signe de cos C doit être +, dans les limites où la circonférence croît avec le rayon, et le signe de cos B doit être + pour les mêmes raisons. Le sin étant naturellement positif, on voit que dans les trois dernières formules (k), on peut extraire les racines carrées sans mettre de doubles signes. Il en résulte qu'il en est de même dans les formules (j), sans quoi elles seraient en opposition avec les formules des triangles rectangles.

Enfin, en remplaçant partout circ a par $\frac{2\pi}{k} \sin ka$, les formules trouvées deviennent, sans ambiguïté :

Triangles quelconques :

$$\frac{\sin A}{\sin ka} = \frac{\sin B}{\sin kb} = \frac{\sin C}{\sin kc},$$

$$\cos ka = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos kb = \cdots,$$

$$\cos kc = \cdots$$

Triangles rectangles :

$$\sin kb = \sin ka \sin B,$$

$$\sin kc = \sin ka \sin C,$$

$$\cos ka = \cot B \cot C,$$

$$\cos kb = \frac{\cos B}{\sin C},$$

$$\cos kc = \frac{\cos C}{\sin B},$$

d'où :

$$\cos ka = \cos kb \cos kc,$$

formule qui va être immédiatement généralisée.

Formule $\cos ka = \cos kb \cos kc + \sin kb \sin kc \cos A$.

Elle se vérifie en remplaçant les cos de ka, kb, kc par leurs valeurs en fonction des angles, les sin de kb et kc par $\frac{\sin ka \sin B}{\sin A}$ et $\frac{\sin ka \sin C}{\sin A}$, puis $\sin^2 ka$ par $1 - \cos^2 ka$, et enfin $\cos ka$ par sa valeur en A, B, C.

Quadrilatère qui a deux angles droits et dont on donne les trois côtés a, b, c, adjacents aux angles droits (a étant adjacent aux deux angles droits). Calcul du côté d.

Menons une diagonale du sommet (ac) au sommet (db). Nommons f sa longueur, l et m les angles qu'elle forme respectivement avec c et a. Nous aurons :

$$\cos kd = \cos kc \cos kf + \sin kc \sin kf \cos l.$$

Mais

$$\cos kf = \cos ka \cos kb$$

et

$$\sin kb = \sin kf \sin m = \sin kf \cos l;$$

donc :

$$\cos kd = \cos ka \cos kb \cos kc + \sin kb \sin kc.$$

Quadrilatère ayant trois angles droits et dont on donne

les deux côtés a, b, adjacents chacun à deux angles droits. Calcul des deux autres côtés.

x étant le côté opposé à b, et y le côté opposé à a, on a, au moyen d'une diagonale :

$$\cos kx \cos ka = \cos ky \cos kb$$

et, d'après la proposition précédente,

$$\cos ky = \cos kx \cos ka \cos kb + \sin kx \sin kb.$$

On en tire aisément :

$$\operatorname{tg} kx = \operatorname{tg} kb \cos ka,$$

et de même :

$$\operatorname{tg} ky = \operatorname{tg} ka \cos kb.$$

Nous avons tout ce qu'il faut maintenant pour calculer l'intervalle de deux points, donnés par leurs coordonnées x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2. Nous définirons ces dernières exactement comme nous l'avons fait dans l'hypothèse précédente, mais nous ne les considérerons que comme provisoires. De plus, le calcul ne sera pas le même, mais plus compliqué, parce que, au lieu de rectangles, nous ne rencontrons ici que des quadrilatères ayant deux ou trois angles droits.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que les deux points donnés soient dans le plan OXY. En appelant δ leur intervalle, α et β leurs distances respectives à l'axe OX, on a :

$$\cos k\delta = \cos k(x_2 - x_1) \cos k\alpha \cos k\beta + \sin k\alpha \sin k\beta,$$

$$\operatorname{tg} k\alpha = \operatorname{tg} ky_1 \cos kx_1, \quad \operatorname{tg} k\beta = \operatorname{tg} ky_2 \cos kx_2.$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer sin $k\alpha$,

cos $k\alpha$, sin $k\beta$ et cos $k\beta$ en fonction de tg kx_1, tg ky_1, tg kx_2, tg ky_2 (*). De plus, cos $k(x_2 - x_1)$ peut aussi s'exprimer de cette manière, et l'on trouve enfin :

$$\cos k\delta = \frac{1 + \operatorname{tg} kx_1 \operatorname{tg} kx_2 + \operatorname{tg} ky_1 \operatorname{tg} ky_2}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 kx_1 + \operatorname{tg}^2 ky_1)(1 + \operatorname{tg}^2 kx_2 + \operatorname{tg}^2 ky_2)}}.$$

Supposons maintenant que les deux points soient quelconques. δ étant toujours leur intervalle, soit δ' la projection de cet intervalle sur le plan OXY. Soient α et β les distances respectives des points x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 au plan OXY; soit enfin γ la distance du pied de α à l'origine. Nous aurons :

$$\cos k\delta = \cos k\delta' \cos k\alpha \cos k\beta + \sin k\alpha \sin k\beta,$$

$$\operatorname{tg} k\alpha = \operatorname{tg} kz_1 \cos k\gamma = \frac{\operatorname{tg} kz_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx_1 + \operatorname{tg}^2 ky_1}}.$$

De même :

$$\operatorname{tg} k\beta = \frac{\operatorname{tg} kz_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx_2 + \operatorname{tg}^2 ky_2}}.$$

On peut donc calculer cos $k\alpha$, sin $k\alpha$, cos $k\beta$, sin $k\beta$ en fonction de tg kx_1, tg ky_1 et tg kz_1. De plus, cos $k\delta'$ a la valeur trouvée précédemment pour le cas où les deux points seraient dans le plan OXY, et qui nous a servi aussi, d'ailleurs, à transformer cos $k\gamma$. Nous aurons, toutes réductions faites :

$$\cos k\delta = \frac{1 + \operatorname{tg} kx_1 \operatorname{tg} kx_2 + \operatorname{tg} ky_1 \operatorname{tg} ky_2 + \operatorname{tg} kz_1 \operatorname{tg} kz_2}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 kx_1 + \operatorname{tg}^2 ky_1 + \operatorname{tg}^2 kz_1)(1 + \operatorname{tg}^2 kx_2 + \operatorname{tg}^2 ky_2 + \operatorname{tg}^2 kz_2)}} \text{ (**)}.$$

(*) Ici et plus loin, aucune discussion de signe n'est nécessaire, pour une raison déjà donnée.

(**) Nous avons employé, dans cette dernière recherche, quelques propriétés empruntées à la géométrie de l'espace, mais évidemment indépendantes des hypothèses sur le parallélisme.

Pour passer enfin des coordonnées provisoires aux coordonnées définitives, nous poserons :

$$X_1 = \operatorname{tg} kx_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} kx_1\sqrt{-1},$$

suivant que k sera réel ou imaginaire simple, pour n'avoir, dans les formules finales, que des coordonnées réelles; de même :

$$Y_1 = \operatorname{tg} ky_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} ky_1\sqrt{-1},$$
$$Z_1 = \operatorname{tg} kz_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} kz_1\sqrt{-1},$$

et de même encore pour X_2, Y_2, Z_2 et les autres points.

La formule deviendra :

$$\cos k\delta = \frac{1 \pm X_1X_2 \pm Y_1Y_2 \pm Z_1Z_2}{\sqrt{(1 \pm X_1^2 \pm Y_1^2 \pm Z_1^2)(1 \pm X_2^2 \pm Y_2^2 \pm Z_2^2)}},$$

les signes supérieurs correspondant à l'hypothèse où k est réel, les signes inférieurs à l'hypothèse où k est imaginaire.

En l'élevant au carré, on aurait précisément la formule (22) du texte, puisque l'on a vu (n° 36) que $\varphi(12) = \cos k(12)$.

Or on a vu aussi qu'en remplaçant les intervalles par cette valeur dans le déterminant (9) (n° 14), celui-ci se réduit à une identité. Donc, dans tous les systèmes de géométrie où k n'est pas nul, les intervalles de cinq points sont liés par l'équation (9).

Nous voyons, de plus, maintenant, quelle est la signification géométrique des coordonnées que nous avions introduites analytiquement dans le texte. Elle se rapproche, autant que possible, de la signification des coordonnées ordinaires.

NOTE V.

Conditions de réalité des coordonnées (n^{os} 19 et 28) (*).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (10) et (11) soient susceptibles d'être vérifiées par des coordonnées réelles, peuvent s'obtenir *a priori* par une transformation des coordonnées.

A cet effet on établira d'abord, par l'analyse seule, les principes suivants :

Il existe des systèmes de neuf nombres réels a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, dont trois sont arbitraires entre certaines limites, et qui satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1,\\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1,\\
a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1,\\
a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0,\\
a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0,\\
a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Chacun des systèmes qui satisfont à ces équations vérifie aussi les suivantes :

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1,\\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1,\\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0,\\
a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0,\\
b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

(*) Cette Note nous a été communiquée par M. le lieutenant Goedseels, répétiteur à l'École militaire.

La transformation des coordonnées se fait, pour chaque point, en posant :

$$x = x_0 + a_1x' + b_1y' + c_1z',$$
$$y = y_0 + a_2x' + b_2y' + c_2z',$$
$$z = z_0 + a_3x' + b_3y' + c_3z'.$$

Dans ces relations, le déterminant $(a_1b_2c_3)$ est égal à ± 1.

Deux ou plusieurs transformations successives peuvent être remplacées par une transformation unique.

Après toute transformation des coordonnées, on peut repasser aux coordonnées primitives par une transformation inverse.

Après une pareille transformation des coordonnées, l'intervalle de deux points continue à s'exprimer par la même fonction. Ainsi $\varphi(1A)$ ou $k(1A)^2$, qui avant la transformation avait pour valeur

$$(x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + (z_1 - z_a)^2,$$

sera, après la transformation :

$$(x'_1 - x'_a)^2 + (y'_1 - y'_a)^2 + (z'_1 - z'_a)^2.$$

Nous rétablissons z_a, et nous rétablirions de même z_b, z_c, qui étaient nuls au n° 19, parce qu'ils ne sont plus nuls, en général, après la transformation.

Une transformation peut toujours être conduite de manière à annuler les trois coordonnées d'un point, deux coordonnées quelconques d'un second point, et l'une de ces mêmes coordonnées pour un troisième point.

Pour le démontrer, il suffit de procéder par des transformations successives, puisque celles-ci peuvent être remplacées pour une transformation unique.

Ces principes établis, pour rechercher si les équations (10) et (11) ont des racines réelles, il suffira de vérifier s'il en est ainsi

après une transformation de coordonnées, que nous effectuerons en annulant, outre z_a, z_b et z_c, qui sont déjà nuls, les trois quantités x_a, x_b et y_a.

Pour rapprocher la relation obtenue de la forme ordinaire, nous remplacerons $\varphi(x)$ par kx^2, ou même par x^2 (car on sait que k doit disparaître), et les équations deviennent alors :

$$
\begin{aligned}
&y_b^2 = \overline{AB}^2,\\
&x_c^2 + y_c^2 = \overline{AC}^2,\\
&x_c^2 + (y_b - y_c)^2 = \overline{BC}^2,\\
&x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{1A}^2,\\
&x_1^2 + (y_1 - y_b)^2 + z_1^2 = \overline{1B}^2,\\
&(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + z_1^2 = \overline{1C}^2.
\end{aligned}
$$

On en déduit aisément ces deux conditions de réalité :

$$(m) \quad . \quad . \quad . \quad 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - (\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)^2 > 0.$$

$$
(n) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - (\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)^2\right]\left[4\overline{AB}^2\overline{1A}^2 - (\overline{1B}^2 - \overline{1A}^2 - \overline{AB}^2)^2\right] -\\
&\left[2\overline{AB}^2(\overline{1C}^2 - \overline{1A}^2 - \overline{AC}^2) + (\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)(\overline{1B}^2 - \overline{1A}^2 - \overline{AB}^2)\right]^2 \geqq 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces conditions peuvent s'exprimer en disant, d'abord, que dans chacun des groupes (AC, BC, AB), (1A, 1B, AB), (1A, 1C, AC), (1B, 1C, BC), un intervalle quelconque est plus petit que la somme des deux autres. Pour le premier de ces groupes, cela résulte de (m); pour le second, cela résulte du premier terme de (n), qui doit être positif.

Pour les deux autres groupes, cela est aussi compris dans l'équation (n), mais cette dernière implique des restrictions plus étendues dans le choix des intervalles.

Ayant choisi AB, AC, BC, 1A, 1B, de manière à rendre positifs le premier membre de (m) et le premier terme de (n), il ne restera plus qu'à choisir 1C, dont la relation (n) donnera immédiatement les limites.

Il va sans dire que l'on pourrait diriger les calculs de manière à faire jouer à l'un quelconque des six intervalles le rôle spécial que joue ici l'intervalle 1C.

NOTE VI.

Sur la ligne droite.

Aux n^os^ 25 et 35, nous avons établi que le long de la ligne droite, les intervalles s'ajoutent et pour l'établir, nous avons procédé par intégration.

Nous aurions pu employer une méthode purement algébrique, en nous bornant à constater que moyennant l'existence des relations

$$x_3 - x_1 = \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z_3 - z_1),$$

$$y_3 - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z_3 - z_1),$$

les deux équations suivantes se réduisent à des identités :

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \pm \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2} = \pm\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2},$$

$$\arccos\frac{1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2}{\sqrt{(1\pm x_1^2\pm y_1^2\pm z_1^2)(1\pm x_2^2\pm y_2^2\pm z_2^2)}} \pm \arccos\frac{1 \pm x_2x_3 \pm y_2y_3 \pm z_2z_3}{\sqrt{(1\pm x_2^2\pm y_2^2\pm z_2^2)(1\pm x_3^2\pm y_3^2\pm z_3^2)}} = \pm\arccos\frac{1 \pm x_1x_3 \pm y_1y_3 \pm z_1z_3}{\sqrt{(1\pm x_1^2\pm y_1^2\pm z_1^2)(1\pm x_3^2\pm y_3^2\pm z_3^2)}},$$

les signes étant convenablement choisis.

Quelque méthode que l'on adopte, on peut remarquer que la ligne droite est caractérisée, dans les trois systèmes de géométrie, par trois propriétés :

Ses équations sont du premier degré.

Si l'on en considère trois points, aucun autre point de l'espace ne peut être distant de deux de ces points comme l'est le troisième.

Le long de cette ligne, les intervalles s'ajoutent.

Et, dans les trois systèmes de géométrie, l'admission d'une seule de ces propriétés suffit pour démontrer l'existence des deux autres, et pour définir complètement la ligne droite.

NOTE VII.

Sur les signes des radicaux dans les valeurs de $\varphi(1A), \varphi(1B), \varphi(1C)$, *tirées des équations* (20).

Si, des équations (20) considérées en prenant les signes supérieurs, on déduit les valeurs de $\varphi(1A)$, $\varphi(1B)$, $\varphi(1C)$, en supprimant simplement l'exposant 2 au second membre, ainsi qu'au numérateur du premier, le signe du radical au dénominateur du premier membre devient douteux. C'est là, nous l'avons déjà dit, une difficulté spéciale à la troisième espèce de géométrie.

Cependant, quelques-unes des observations qui vont suivre sont générales et applicables aux trois espèces, mais pour les deux premières elles étaient en quelque sorte évidentes, et ne nécessitaient pas une discussion approfondie.

On a vu, dans la Note III, qu'il y a un grand intérêt, pour la détermination du signe du radical dans (22), à admettre que dans (20) les radicaux puissent être pris positivement.

Le système d'intervalles auquel il faut appliquer les calculs est donné *a priori*, et nous pouvons définir nos coordonnées,

$x_a, \ldots y_c$, par telles équations qu'il nous plaira de choisir, pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires, et qu'en outre elles ne limitent pas arbitrairement le champ des valeurs réelles de ces coordonnées, ce qui conduirait à exclure d'une manière factice des systèmes d'intervalles qui ne seraient cependant pas impossibles, c'est-à-dire qui ne seraient pas en contradiction avec le déterminant (9), seule condition qu'ils doivent remplir.

On aurait un exemple d'équations contradictoires si l'on prétendait rendre tous les radicaux positifs, non pas dans (20), mais dans (21). En effet, l'élimination de $\sqrt{1+x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ entre ces équations, laisserait subsister deux équations du premier degré entre x_1 et y_1. Ces deux coordonnées étant ainsi déterminées, on trouverait :

$$\sqrt{1+x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \frac{\varphi(1\,\mathrm{A})\sqrt{1+x_a^2+y_a^2}}{1+x_1x_a+y_1y_a},$$

et deux autres équations analogues. Les trois seconds membres seraient certainement égaux, d'après la manière dont les équations ont été résolues; mais rien ne prouve qu'ils seraient positifs, puisqu'on ne s'est pas servi, dans la résolution, de cette propriété. On doit donc simplement conclure que les trois radicaux peuvent être pris positifs *ou négatifs*.

Il n'en est pas de même pour les équations (20). En prenant

$$\sqrt{1+x_a^2+y_a^2} = m, \quad \sqrt{1+x_b^2+y_b^2} = n, \quad \sqrt{1+x_c^2+y_c^2} = p,$$

m, n, p étant trois quantités positives arbitraires, on aura :

$$\begin{aligned} 1 + x_a x_b + y_a y_b &= \varphi(\mathrm{AB})mn, \\ 1 + x_a x_c + y_a y_c &= \varphi(\mathrm{AC})mp, \\ 1 + x_b x_c + y_b y_c &= \varphi(\mathrm{BC})np, \end{aligned}$$

et l'on trouvera toujours six quantités $x_a, \ldots y_c$, réelles *ou imaginaires*, répondant à ces six équations algébriques.

La question est donc de savoir si les racines ne sont pas trop souvent imaginaires, jusqu'au point d'écarter des systèmes d'intervalles qui seraient admissibles.

La réponse à cette question se trouve écrite d'avance au n° 29 : « on ne saurait admettre des coordonnées imaginaires, sans être obligé d'admettre aussi des intervalles imaginaires, ce que nous voulons exclure » et ce qui serait contradictoire avec notre système d'intervalles réels donné *a priori*.

Telle est donc l'assertion qui doit être justifiée. Elle le serait complètement si la formule (22) était établie dans l'hypothèse des trois radicaux positifs, car si une ou plusieurs des trois quantités x_2, y_2, z_2 sont imaginaires, on pourra toujours, et d'une infinité de manières, déterminer des quantités réelles x_1, y_1, z_1 rendant φ^2 (12) négatif. Or dans la Note III, la formule (22) (ou f de cette Note III) est établie d'une manière irréfutable pour le cas des coordonnées réelles, et comme la valeur de θ(12), donnée par (f), est la racine *algébrique* du déterminant qui précède cette équation, cette racine doit être indépendante du sens qu'on attache aux lettres qui y entrent. Elle est donc exacte même pour les valeurs imaginaires, pourvu qu'alors le signe du radical ait encore un sens précis.

Ce sens peut lui être assigné d'après une règle quelconque, comprenant sans discontinuité le cas du radical réel.

On voit donc que l'hypothèse des trois radicaux positifs dans (20) est bien légitime, parce que tous les systèmes d'intervalles que cette hypothèse peut exclure sont exclus à bon droit.

RAYON DE COURBURE

DE

CERTAINES COURBES PLANES (*)

PAR

J. NEUBERG,

Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Plusieurs mathématiciens (**) se sont occupés récemment de la détermination géométrique du centre de courbure des coniques et de quelques autres courbes comprenant les coniques comme cas particulier. Nous allons traiter la même question en faisant usage de considérations cinématiques très simples.

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e sér., t. XXV, n° 4, pp. 374-386, 1893.

(**) Fouret, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 14 et 21 avril 1890; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XX, p. 60. — Godefroy, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 20; *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. XII, p. 85; *Journal de l'École polytechnique*, LXIIe cahier. — Jamet, *Annales de l'École normale supérieure*, 3e série, t. IV, suppl., p 19. — Mannheim, *Bulletin de la Société mathématique*, t XVIII, p. 135. — De Longchamps et Demoulin, *Association française pour l'avancement des sciences*. Congrès de Marseille, 1891.

Pour plus de clarté, nous rappelons le principe de notre méthode (*).

Soit D une droite qui se déplace d'une manière continue dans un même plan (fig. 1). Prenons sur cette droite le point quelconque A et, par une translation qui rende commune à tous les autres points la vitesse Aa du point A, assujettissons celui-ci à décrire sa propre trajectoire.

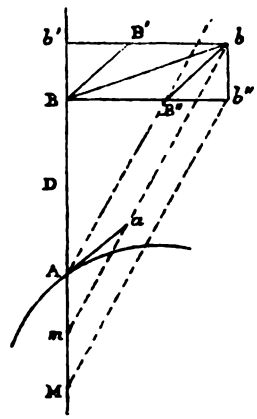


FIG. 1.

Comme la droite change à chaque instant de direction, son mouvement effectif peut s'obtenir en composant la translation empruntée au point A avec une rotation effectuée autour de ce point comme s'il était fixe. La vitesse d'un point quelconque B est donc la résultante Bb

(*) Voir LAMARLE, *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral, précédé de la cinématique du point, de la droite et du plan.* (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XI et t. XV de la collection in-8°.)

d'une vitesse BB′ égale et parallèle à Aa, et d'une vitesse BB″ perpendiculaire à D; le lieu du point B″ est une droite passant par A. Décomposons la vitesse Bb en deux vitesses dirigées, l'une Bb' suivant D et dite *vitesse de glissement*, l'autre Bb'' à angle droit sur la première et dite *vitesse de circulation*. Les vitesses de glissement des différents points de D sont toutes égales et de même sens; comme les droites B″b, B″b'' sont constantes en grandeur et en direction, les lieux des points b, b'' sont des droites mb, Mb'', parallèles à AB″. Le point M où la dernière coupe D a une vitesse Mm dirigée suivant D; on l'appelle *centre de circulation* : le mouvement effectif de D peut être considéré comme résultant du glissement de la droite sur elle-même, combiné avec une rotation autour de M.

Pour obtenir le centre de circulation, il suffit de connaître les vitesses de deux points de D; car la droite qui joint les extrémités de leurs composantes normales à D, passe par le point cherché. Cette construction est encore applicable lorsqu'on donne les vitesses de deux points qui, assujettis à rester sur la droite D, ont un mouvement propre sur cette droite; car celui-ci n'affecte pas leur vitesse de circulation.

Le centre de circulation décrit une courbe tangente à chaque instant à la droite D.

1. Ces préliminaires étant posés, nous nous occupons d'abord du centre de courbure d'une conique.

Soient Ox, Oy un diamètre d'une parabole et la tangente à son extrémité (fig. 2). La tangente en un point M ayant pour abscisse OP rencontre les axes en des points A, B tels, que AO = OP. Par suite, les points A et P ont sur Ox des vitesses égales et de sens contraires; nous les représentons par AO et PO. La vitesse correspondante de M

sur la parabole est MB, et la vitesse de circulation du point A considéré sur la tangente AB est la projection AV de AO sur une perpendiculaire à AB. Le centre de courbure de la parabole au point M est le centre de circulation I

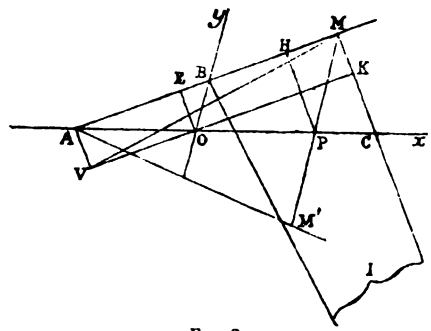


Fig. 2.

de la normale MC. Les droites AB, MC étant constamment perpendiculaires, leurs vitesses angulaires, qui ont respectivement pour expression AV : MA, MB : MI, sont égales; on en conclut

$$\rho = \frac{MA \cdot MB}{h}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ρ désignant le rayon de courbure MI, et h la distance OE du point O à la tangente.

On démontre facilement que BI est perpendiculaire à MV. Si l'on projette O en K sur la normale, les points A, B, K, I sont sur une même circonférence.

2. Soient (fig. 3) A, B les points de rencontre des asymptotes Ox, Oy d'une hyperbole avec la tangente au point M, I le centre de courbure en M. Comme $OA = 2OP$, on peut représenter les vitesses des points P, A sur Ox

par PO, AO; la vitesse de M sur l'hyperbole sera MB, et la vitesse de circulation du point A, considéré comme appartenant à AB, sera la ligne AV, égale et parallèle à la perpendiculaire EO abaissée de O sur AB. On en conclut la formule (1); de plus, BI est perpendiculaire à MV, l'angle KAI est droit et les points A, B, K, I sont sur une même circonférence, K étant la projection de O sur MC.

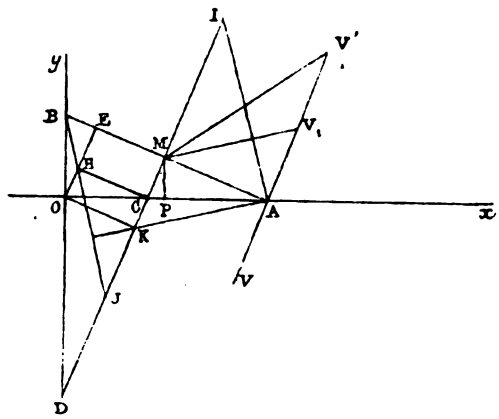


FIG. 3.

3. Soient maintenant A, B les points de rencontre de deux diamètres conjugués d'une conique avec la tangente menée en M, MCD la normale, et J le centre de courbure (fig. 3); soient $x = OP$, $\alpha = OA$ les abscisses des points M, A; on a

$$x\alpha = a'^2,$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dx}{x}.$$

Il en résulte que les vitesses des points P et A sur Ox

peuvent être représentées par PO et $Ax = OA$. La vitesse de M sur la conique sera MB, et la vitesse de circulation du point A, considéré comme appartenant à la tangente, sera le segment AV_1, égal et parallèle à la perpendiculaire OE abaissée de O sur AB. On en conclut

$$\rho = -\frac{MA \cdot MB}{h}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

pourvu qu'on applique la règle des signes, d'une part aux segments MA et MB, d'autre part aux segments parallèles OE, JM.

On voit facilement que BJ est perpendiculaire à MV_1 ou à sa parallèle AK; donc J est l'orthocentre du triangle KAB.

Lorsque Ox, Oy sont les axes principaux, on a aussi

$$\rho = \frac{MC \cdot MD}{MK}.$$

Voici deux remarques qui se déduisent immédiatement de ce qui précède.

Il existe une infinité de coniques ayant pour diamètres conjugués Ox, Oy *et touchant* AB; *le lieu du centre de courbure au point de contact de* AB *est une parabole passant par* A, B, O *et ayant pour axe la perpendiculaire menée au milieu de* AB.

Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent au point M : *les rayons de courbure des deux courbes en ce point sont entre eux comme les distances du centre aux normales correspondantes.*

Si Ox, Oy sont les axes principaux,

$$OC = \frac{c^2}{a^2} OP;$$

on peut donc représenter les vitesses de C et P sur Ox par CO, PO. Alors MB est la vitesse de M sur la courbe, CH est la vitesse de circulation de C considéré comme point de la normale ; par suite, BH passe au centre de courbure J.

4. La construction trouvée ci-dessus peut être étendue à toutes les courbes dans lesquelles les abscisses $OP = x$, $OA = \alpha$ d'un point M de la courbe, et du point où la tangente AB rencontre l'axe Ox, vérifient une relation de la forme

$$\alpha = px^n,$$

n et p étant des constantes. En effet, cette égalité donne

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = n\frac{dx}{x};$$

donc les vitesses des points P, A sur Ox peuvent être représentées par les segments $PO = -x$, $Ax = -n\alpha$. La vitesse de M est alors MB et la vitesse de circulation de A, considéré comme point de la tangente, est $AV' = n.OE$. Le rayon de courbure MJ a pour expression

$$\rho = \frac{MA \cdot MB}{nh},$$

et BJ est perpendiculaire à MV'.

L'égalité $\alpha = px^n$ donne

$$x - \frac{y}{y'} = px^n,$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(1 - px^{n-1})}.$$

Si $n = 1$, l'intégrale de la dernière équation est

$$y^{1-p} = ax,$$

a étant une constante. L'hyperbole rapportée à ses asymptotes, la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente correspondante, la développée de la parabole rentrent dans ce cas.

Soit $n \lessgtr 1$; l'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^{n-2}dx}{x^{n-1}(1-px^{n-1})} = \frac{1}{n-1}\frac{dz}{z(1-pz)} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{dz}{z} + \frac{pdz}{1-pz}\right),$$

z désignant x^{n-1}. On en conclut

$$y^{n-1} = a\frac{x^{n-1}}{1-px^{n-1}}, \qquad \text{ou} \qquad x^{1-n} - ay^{1-n} = p,$$

équation de la forme

$$ax^m + by^m = c.$$

Les courbes correspondantes sont appelées *courbes de Lamé*; leur rayon de courbure a pour expression

$$\rho = -\frac{\text{MA} \cdot \text{MB}}{(m-1)h}.$$

Comme cas particuliers, on peut remarquer les coniques rapportées à deux diamètres conjugués, les paraboles touchant les axes de coordonnées ($m = \frac{1}{2}$), les hyperboles passant par O et ayant pour asymptotes des parallèles aux axes de coordonnées ($m = -1$), la développée de l'ellipse et l'hypocycloïde à quatre rebroussements ($m = \frac{2}{3}$), la *kreuzcurve* ($m = -2$), etc.

5. Supposons que la tangente AB se déplace de manière que $\text{OB} = px^n$; on trouve, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\rho = \frac{\overline{\text{MB}}^2}{nh}.$$

L'équation différentielle de la courbe est

$$y - xy' = px^n,$$

ou

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = px^{n-2}dx.$$

Si $n = 1$, on trouve

$$y = x(a - plx).$$

Si $n \gtrless 1$, la courbe a pour équation

$$y = ax + bx^n,$$

a et b étant des constantes.

6. Soit M (x, y, z) un point quelconque de la *courbe triangulaire symétrique*, représentée par l'équation

$$ax^m + by^m + cz^m = 0;$$

et soient A', B', C' les points où la tangente en M rencontre les côtés BC, CA, AB du triangle de référence (fig. 4).

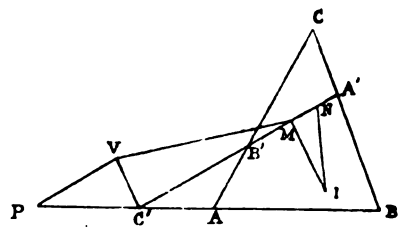


FIG. 4.

Pour trouver le rayon de courbure MI $= \rho$, il suffit de connaître les vitesses simultanées MN $= v$, C'P $= v_1$ de M sur la courbe et de C' sur AB. La vitesse de circulation de C' considéré comme point de la tangente A'B' étant C'V, les triangles MC'V, IMN sont semblables; donc NI est perpendiculaire à MV, et

$$\rho = \frac{v}{v_1} \frac{MC'}{\sin C'},$$

A′, B′, C′ désignant les angles de la tangente avec BC, CA, AB.

La tangente en M ayant pour équation

$$ax^{m-1}X + by^{m-1}Y + cz^{m-1}Z = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

les coordonnées de C′ vérifient l'égalité

$$ax^{m-1}X = -by^{m-1}Y;$$

d'où, par différentiation,

$$(m-1)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) + \frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y} = 0.$$

Les différentielles dx, dy sont proportionnelles aux projections de MN sur les coordonnées x, y de M (*), et les différentielles dX, dY sont proportionnelles aux projections de C′P sur les coordonnées X, Y de C′. Donc les quotients

$$\frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{y}, \quad \frac{dX}{X}, \quad \frac{dY}{Y}$$

sont entre eux comme les quantités

$$\frac{v}{MA'}, \quad \frac{v}{MB'}, \quad \frac{v_1}{C'A}, \quad \frac{v_1}{C'B},$$

et l'on a

$$(m-1)v\left(\frac{1}{MA'} - \frac{1}{MB'}\right) + v_1\left(\frac{1}{C'A} - \frac{1}{C'B}\right) = 0.$$

Cette relation fait connaître le rapport $v : v_1$; on trouve ensuite

$$\rho = \frac{1}{m-1}\,\frac{AB.MA'.MB'.MC'}{B'A'.C'A.C'B\sin C'}.$$

Pour transformer cette expression, désignons par α, β, γ

(*) Les coordonnées x, y, z sont les perpendiculaires abaissées de M sur BC, CA, AB.

les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur la tangente, par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Au moyen des relations

$$x = MA' \sin A', \quad y = MB' \sin B', \quad z = MC' \sin C',$$
$$\alpha = C'A \sin C', \quad \beta = C'B \sin C', \quad \gamma = \frac{B'A' \sin A' \sin B'}{\sin C},$$
$$2R = \frac{AB}{\sin C},$$

on obtient cette formule élégante et peut-être nouvelle :

$$\rho = 2R \frac{xyz}{(m-1)\alpha\beta\gamma}.$$

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rayons de courbure en M des trois coniques qui touchent A'B' en M, et dont la première est circonscrite au triangle ABC, la seconde inscrite, la troisième conjuguée; ces courbes correspondent aux valeurs $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$, $m = 2$. On a

$$\rho_1 = -R\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}, \quad \rho_2 = 4\rho_1, \quad \rho_3 = -2\rho_1;$$

pour la courbe triangulaire d'exposant m, on obtient

$$\rho = \frac{2\rho_1}{1-m},$$

formule de M. Jamet (*loc. cit.*, p. 19).

La formule précédente est également applicable aux *courbes anharmoniques* représentées par l'équation

$$x^p y^q z^r = \text{const.},$$

où $p + q + r = 0$; car l'équation de la tangente,

$$\frac{pX}{x} + \frac{qY}{y} + \frac{rZ}{z} = 0,$$

rentre dans l'équation (A) pour $m = 0$.

Si deux des exposants p, q, r sont égaux, on a le théorème suivant :

Une conique est tangente à une droite donnée m *au point* M *et touche deux côtés du triangle* ABC *aux extrémités du troisième côté : son rayon de courbure en* M *est double du rayon de courbure en* M *de la conique circonscrite au triangle* ABC *et touchant* m *en* M.

7. Soient $MO = r$, $MP = u$ les distances d'un point M d'une courbe à un point fixe O et à une droite fixe PQ (fig. 5). Supposons que l'on ait

$$r = pu^n,$$

p et n étant des constantes. Cette équation donne

$$\frac{dr}{r} = \frac{ndu}{u}.$$

Menons Ox perpendiculaire à QP. Les vitesses de glissement de M sur le rayon vecteur MO et sur une parallèle à Ox peuvent être représentées par $MO = r$ et $ME = \frac{u}{n}$. La règle du quadrilatère des vitesses donne pour la vitesse de M sur sa trajectoire le segment MT, les angles MOT et TEM étant droits.

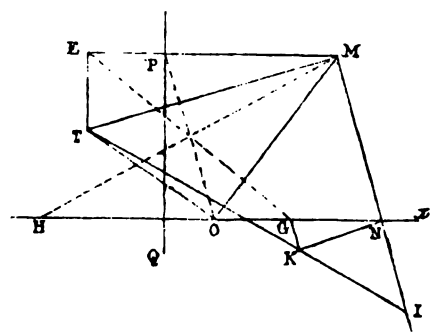


Fig. 5.

Menons la normale MN. Le quadrilatère MOTE étant inscriptible, on voit facilement que les triangles OME, NOM sont équiangles; on en déduit

$$\overline{OM}^2 = ON \cdot ME, \qquad \text{ou} \qquad r^2 = \frac{\alpha u}{n}.$$

α désignant ON. Par différentiation on obtient

$$2\frac{dr}{r} = \frac{du}{u} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Les différentielles dr, du, $d\alpha$ sont proportionnelles aux vitesses de M sur MO, de M sur MP et de N sur Ox. Pour la première vitesse, nous avons déjà pris $MO = r$, et pour la seconde $ME = \frac{u}{n}$; nous en concluons que la troisième est égale à $\alpha\left(2 - \frac{1}{n}\right)$. Soit NG la vitesse de N (*); si la vitesse de circulation du point N considéré comme appartenant à la normale est NK, la droite TK rencontre MN au centre de courbure.

(*) On porte OH = NO et l'on tire les droites MH, PO qui se coupent en L; la droite EL rencontre Ox en G.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Bruxelles. — Imprimerie de F. Hayez, rue de Louvain, 112.

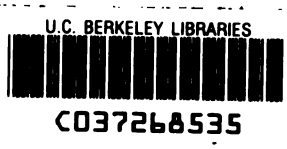
'URN
Astronomy/Mathematics/Statistics/Computer Science Library
100 Evans Hall
642-3381

\N PERIOD 1 **7 DAYS**	2	3
	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

M NO. DD 3, 13m, 6'76
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037268535

QA1
M34
v.13
106255